

**C. NĂSTĂSESCU
C. NIȚĂ
GH. RIZESCU**

ALGEBRĂ

IX

MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI ÎNVĂȚĂMÎNTULUI

C. NĂSTĂSESCU

C. NIȚĂ

GH. RIZESCU

IX

Matematică

Algebră

Manual pentru clasa a IX-a



EDITURA DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ — BUCUREȘTI

CAPITOLUL I

ECUAȚII DE GRADUL ÎNTII ȘI DE GRADUL AL DOILEA (RECAPITULARE)

§1. ECUAȚII ȘI INECUAȚII DE GRADUL ÎNTII

1.1. Forma generală a ecuației de gradul întâi este

$$ax + b = 0, \quad a \neq 0 \quad (1)$$

a, b fiind numere reale.

Observație. În practică vom considera și ecuații a căror rezolvare se reduce la rezolvarea unor ecuații de gradul întâi.

Ecuația (1) are rădăcina $-\frac{b}{a}$.

Interpretarea geometrică (fig. I.1). Graficul funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax + b$, este o dreaptă care intersectează axa Ox în punctul de abscisă $-\frac{b}{a}$ ($-\frac{b}{a}$ fiind rădăcina ecuației $ax + b = 0$). În figura I.1 am construit graficul pentru cazul: $a > 0$ și $b > 0$.

Exemplu. Să se rezolve ecuația în x ,

$$m - x = 1 - m^2x. \quad (2)$$

Această ecuație devine

$$(m^2 - 1)x = 1 - m.$$

Dacă $m^2 - 1 \neq 0$, adică $m \neq 1$ și $m \neq -1$, atunci ecuația (2) este de gradul întâi, având rădăcina

$$\frac{1 - m}{m^2 - 1}, \text{ adică } -\frac{1}{m + 1}.$$

Dacă $m = 1$, ecuația (2) devine

$$0 \cdot x = 0$$

care este adevărată pentru orice număr real x .

Dacă $m = -1$, se obține

$$0 \cdot x = 2,$$

care nu este verificată pentru nici o valoare a lui x .

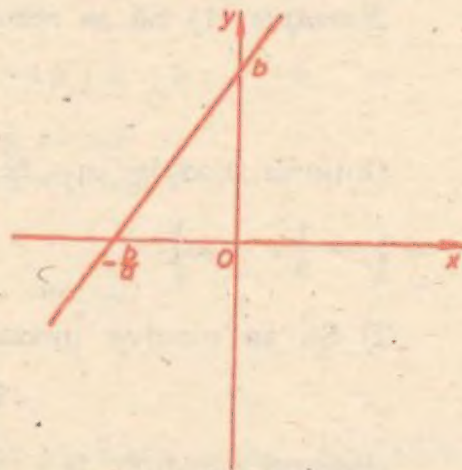


Fig. I.1

1.2. Inecuațiile de forma

$$ax + b > 0, \quad ax + b \geq 0, \quad ax + b < 0 \quad \text{sau} \quad ax + b \leq 0,$$

unde a și b sînt numere reale date, iar $a \neq 0$, se numesc *inecuații de gradul întâi*.

Observație. În practică vom considera orice inecuație care se reduce, folosind proprietățile inegalităților, la o inecuație de gradul întâi.

1. Să considerăm inecuația de gradul întâi

$$ax + b > 0, \quad a \neq 0. \quad (3)$$

1° Dacă $a > 0$, atunci $x > -\frac{b}{a}$, adică $x \in \left(-\frac{b}{a}, +\infty\right)$.

2° Dacă $a < 0$, atunci $x < -\frac{b}{a}$, adică $x \in \left(-\infty, -\frac{b}{a}\right)$.



Fig. 1.2

Grafic, cele două situații sînt reprezentate în figura 1.2, respectiv în figura 1.3, porțiunile hașurate marcînd mulțimea soluțiilor.

2. Pentru inecuația $ax + b \geq 0$, avem:

1° Dacă $a > 0$, atunci $x \geq -\frac{b}{a}$, adică

$$x \in \left[-\frac{b}{a}, +\infty\right).$$

2° Dacă $a < 0$, atunci $x \leq -\frac{b}{a}$, adică

$$x \in \left(-\infty, -\frac{b}{a}\right].$$

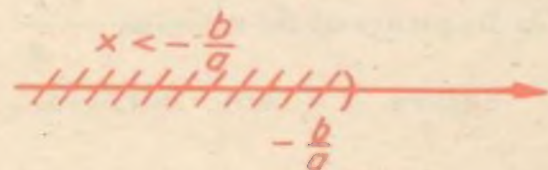


Fig. 1.3

Observăm că punctul $-\frac{b}{a}$ face parte din mulțimea soluțiilor.

Exemple. 1) Să se rezolve inecuația

$$x + 4 > -2x + 3.$$

Obținem succesiv: $x + 2x > -4 + 3$, sau $3x > -1$, de unde $x > -\frac{1}{3}$. Deci

$$x \in \left(-\frac{1}{3}, +\infty\right).$$

2) Să se rezolve inecuația

$$4(6 - x) \geq 3(x - 13).$$

Obținem succesiv: $24 - 4x \geq 3x - 39$, sau $-4x - 3x \geq -39 - 24$, de unde $-7x \geq -63$, adică $x \leq 9$. Deci $x \in (-\infty, 9]$.

1.3. Ecuații care conțin necunoscuta în modul

Valoarea absolută a unui număr a , notată prin $|a|$, se definește astfel:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{dacă } a > 0, \\ 0, & \text{dacă } a = 0, \\ -a, & \text{dacă } a < 0. \end{cases}$$

De exemplu: $|9| = 9$, $|\frac{1}{3}| = \frac{1}{3}$, $|-30| = 30$, $|-\sqrt{2}| = \sqrt{2}$ etc.

Valoarea absolută a numărului a se mai numește *modulul* numărului a . Rezultă că $|x| = \max(-x, x)$ și deci: $x \leq |x|$, $-x \leq |x|$, ($\max(-x, x)$ fiind cel mai mare dintre numerele $-x$ și x).

Să menționăm proprietățile fundamentale ale modulului.

Dacă a și b sînt numere, atunci:

1. $|a| \geq 0$;
2. $|a| = 0$ dacă și numai dacă $a = 0$;
3. $|ab| = |a| \cdot |b|$;
4. $|a + b| \leq |a| + |b|$.

Primele trei proprietăți sînt evidente, după definiția modulului.

Să o demonstrăm pe ultima. Într-adevăr, dacă $a = 0$ sau $b = 0$, atunci este clar că $|a + b| = |a| + |b|$. Deci să presupunem $a \neq 0$ și $b \neq 0$. Să considerăm cele patru cazuri posibile:

- i) Dacă $a > 0$ și $b > 0$, atunci $a + b > 0$. Deci $|a + b| = |a| + |b|$.
- ii) Dacă $a < 0$ și $b < 0$, atunci $a + b < 0$. În acest caz $|a| = -a$, $|b| = -b$, $|a + b| = -(a + b)$ și deci $|a + b| = |a| + |b|$.
- iii) Dacă $a > 0$ și $b < 0$, atunci $|a| = a$ și $|b| = -b$. În această situație avem, sau $a + b \geq 0$, sau $a + b < 0$. Dacă $a + b \geq 0$, atunci

$$|a + b| = a + b \leq a = |a| \leq |a| + |b|;$$

iar dacă $a + b < 0$, atunci

$$|a + b| = -a - b = -a + |b| \leq |b| \leq |a| + |b|.$$

- iv) Analog, se demonstrează cazul $a < 0$ și $b > 0$.

În practică este foarte utilă următoarea proprietate:

5. $|a| \leq c$ dacă și numai dacă $-c \leq a \leq c$.

(În aceste relații se poate înlocui semnul \leq cu semnul $<$.)

De asemenea, avem:

6. $||a| - |b|| \leq |a - b|$.

Proprietățile 5 și 6 se demonstrează ușor pe baza celor precedente. Demonstrarea lor o lăsăm ca exercițiu.

Exemple. 1) Să se rezolve ecuația

$$|x - 3| = 4. \quad (4)$$

După definiția modului avem

$$|x - 3| = \begin{cases} x - 3, & \text{dacă } x - 3 \geq 0, \\ -(x - 3), & \text{dacă } x - 3 < 0, \end{cases}$$

adică

$$|x - 3| = \begin{cases} x - 3, & \text{dacă } x \geq 3, \\ -x + 3, & \text{dacă } x < 3. \end{cases}$$

Așadar, ecuația (4) devine:

a) Dacă $x \geq 3$ avem $x - 3 = 4$, de unde $x = 7$. Cum $7 > 3$, rezultă că 7 este o rădăcină a ecuației.

b) Dacă $x < 3$ avem $-x + 3 = 4$, de unde $x = -1$. Cum $-1 < 3$, rezultă că -1 este o rădăcină a ecuației. Deci rădăcinile ecuației (4) sînt: $x_1 = 7$, $x_2 = -1$.

2) Să se rezolve ecuația

$$|6 - x| = 2x + 3. \quad (5)$$

$$\text{Avem } |6 - x| = \begin{cases} 6 - x, & \text{dacă } 6 - x \geq 0, \\ -6 + x, & \text{dacă } 6 - x < 0. \end{cases}$$

Așadar, ecuația (5) devine:

a) Dacă $6 - x \geq 0$, adică $x \leq 6$, avem $6 - x = 2x + 3$, de unde $x = 1$. Cum $1 \leq 6$, rezultă că 1 este rădăcină a ecuației.

b) Dacă $6 - x < 0$ adică $x > 6$, avem $-6 + x = 2x + 3$, de unde $x = -9$. Cum -9 nu verifică inecuația $x > 6$, rezultă că -9 nu este rădăcină a ecuației (5). Deci ecuația (5) are rădăcina 1.

§2. ECUAȚII DE GRADUL AL DOILEA CU RĂDĂCINI REALE

2.1. Rezolvarea ecuației de gradul al doilea cu rădăcini reale

Fie ecuația

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0,$$

a, b, c , fiind numere reale.

O astfel de ecuație se numește *ecuație de gradul al doilea cu coeficienți reali*. Se numește *soluție* sau *rădăcină reală* a ecuației un număr real α astfel încît să avem

$$a\alpha^2 + b\alpha + c = 0.$$

Prin *rezolvarea* ecuației $ax^2 + bx + c = 0$ se înțelege determinarea tuturor soluțiilor (rădăcinilor) acestei ecuații.

Ecuația are rădăcini reale dacă și numai dacă $b^2 - 4ac \geq 0$. Dacă $b^2 - 4ac < 0$, ecuația nu are rădăcini reale.

Existența rădăcinilor reale ale ecuației de gradul al doilea, precum și numărul lor depind de expresia $b^2 - 4ac$. Această expresie se numește *discriminantul* ecuației de gradul al doilea și se notează cu Δ .*

Dacă discriminantul ecuației de gradul al doilea este pozitiv, atunci ecuația are două rădăcini reale diferite între ele

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}; \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Dacă discriminantul ecuației de gradul al doilea este egal cu zero, atunci ecuația are două rădăcini reale egale

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}.$$

Exemple: 1) Ecuația $2x^2 - x - 3 = 0$ are discriminantul $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3) = 25 > 0$. Deci, ecuația are două rădăcini reale diferite

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{25}}{4} = \frac{3}{2};$$

$$x_2 = \frac{1 - \sqrt{25}}{4} = -1.$$

2) Ecuația $2x^2 - 4x + 2 = 0$ are discriminantul $\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 0$. Această ecuație are rădăcini reale egale

$$x_1 = x_2 = \frac{4}{2 \cdot 2} = 1.$$

3) Ecuația $2x^2 + x + 1 = 0$ are discriminantul $\Delta = 1 - 4 \cdot 2 = -7 < 0$. Deci, ecuația nu are rădăcini reale.

Dăm acum câteva forme particulare importante ale ecuației de gradul al doilea, care are discriminantul $\Delta \geq 0$.

1. Fie ecuația $ax^2 + bx + c = 0$ și să presupunem că b are forma $b = 2b_1$ (de exemplu, $b = 2$, $b = 4\sqrt{2}$ etc.).

Rădăcinile ecuației $ax^2 + 2b_1x + c = 0$ sînt

$$x_1 = \frac{-b_1 + \sqrt{b_1^2 - ac}}{a}; \quad x_2 = \frac{-b_1 - \sqrt{b_1^2 - ac}}{a}.$$

Exemplu. Să se rezolve ecuația

$$3x^2 - 10x + 3 = 0.$$

* Expresia $b^2 - 4ac$ se mai numește realizantul ecuației.

Deoarece coeficientul lui x este $-10 = 2 \cdot (-5)$, aplicăm formulele de mai înainte și obținem:

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 9}}{3} = \frac{5 \pm 4}{3}.$$

Deci

$$x_1 = 3; \quad x_2 = \frac{1}{3}.$$

2. *Forma redusă a ecuației de gradul al doilea.* O ecuație de gradul al doilea se numește *reduasă* dacă coeficientul lui x^2 este egal cu 1. Forma generală a ecuației reduse este:

$$x^2 + px + q = 0, \quad (3)$$

unde p și q sînt numere reale.

Punînd în formula generală a rădăcinilor ecuației de gradul al doilea:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$a = 1$, $b = p$ și $c = q$ se obține formula pentru rădăcinile ecuației de gradul al doilea sub formă redusă:

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}; \quad x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

Exemplu. Fie ecuația $x^2 + 4x - 5 = 0$.

Atunci

$$x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4 + 5} = -2 \pm 3,$$

de unde

$$x_1 = 1; \quad x_2 = -5.$$

Observație. Orice ecuație de gradul al doilea $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) poate să fie adusă la forma redusă împărțind ambii membri ai săi prin a :

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ este echivalentă cu } x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$

2.2. Relații între coeficienții și rădăcinile unei ecuații de gradul al doilea

1. Relațiile lui Viète

Dacă rădăcinile ecuației

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0, \quad \Delta = b^2 - 4ac \geq 0)$$

sînt x_1 și x_2 , atunci:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a},$$

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

Aceste relații poartă numele de *relațiile lui Viète*.

Exemplu. Ecuația $4x^2 - 3x - 1 = 0$ are discriminantul $\Delta = 9 + 16 = 25 > 0$. Deci ecuația are două rădăcini reale distincte x_1 și x_2 , iar

$$x_1 + x_2 = -\frac{-3}{4} = \frac{3}{4}, \quad x_1 x_2 = \frac{-1}{4} = -\frac{1}{4}.$$

2. Formarea unei ecuații de gradul al doilea cînd se cunosc rădăcinile

Dacă x_1 și x_2 sînt numere reale, fie $x_1 + x_2 = -p$ și $x_1 x_2 = q$. Atunci x_1 și x_2 sînt rădăcinile ecuației de gradul al doilea $x^2 + px + q = 0$.

Intr-adevăr, $x_1^2 + px_1 + q = x_1^2 - (x_1 + x_2)x_1 + x_1 x_2 = x_1^2 - x_1^2 - x_1 x_2 + x_1 x_2 = 0$. Analog, avem $x_2^2 + px_2 + q = 0$. Deci x_1 și x_2 sînt rădăcinile ecuației $x^2 + px + q = 0$.

Exemplu. Fie $x_1 = -5$ și $x_2 = 2$. Atunci $x_1 + x_2 = -3 = -p$, $x_1 x_2 = -10 = q$ și deci $p = 3$ și $q = -10$. Ecuația care are rădăcinile $x_1 = -5$ și $x_2 = 2$ este

$$x^2 + 3x - 10 = 0.$$

2.3. Studiul semnelor rădăcinilor ecuației de gradul al doilea

Fie ecuația de gradul al doilea

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0 \quad (1)$$

cu $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$.

Să notăm cu S și P suma, respectiv produsul rădăcinilor x_1, x_2 ale ecuației (1), adică:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a};$$

$$P = x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

Împărțind ambii membri ai ecuației (1) prin a , se obține o ecuație echivalentă:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

sau

$$x^2 - Sx + P = 0. \quad (2)$$

Vom arăta cum, în raport de semnul lui P și S , se poate stabili dacă rădăcinile ecuației sînt pozitive sau negative, fără a le afla efectiv.

Sînt posibile următoarele combinații ale semnelor lui P și S :

1° $P > 0$. Deoarece $x_1 x_2 = P > 0$ rezultă că ambele rădăcini au același semn. Dacă $S > 0$, atunci $x_1 + x_2 = S > 0$ și deci ambele rădăcini sînt pozitive. Dacă $S < 0$, atunci $x_1 + x_2 = S < 0$ și deci ambele rădăcini sînt negative.

2° $P < 0$. Deoarece $x_1 x_2 = P < 0$, atunci una dintre rădăcini este pozitivă, iar cealaltă negativă. Dacă $S > 0$, atunci $x_1 + x_2 = S > 0$ și deci rădăcina pozitivă este mai mare decât valoarea absolută a rădăcinii negative. Dacă $S < 0$, atunci $x_1 + x_2 = S < 0$ și deci valoarea absolută a rădăcinii negative este mai mare decât rădăcina pozitivă.

Rezultatele obținute se pot reprezenta în următorul tabel:

$P > 0$	$S > 0$ $x_1 > 0, x_2 > 0$
	$S < 0$ $x_1 < 0, x_2 < 0$
$P < 0$	$S > 0$ rădăcinile au semne diferite: $x_1 < 0, x_2 > 0, x_1 < x_2$
	$S < 0$ rădăcinile au semne diferite: $x_1 < 0, x_2 > 0, x_1 > x_2$

Observații: 1. Fie $S = 0$. Ecuația are rădăcini reale numai dacă $P \leq 0$. În acest caz avem $x_1 + x_2 = 0$, adică $x_1 = -x_2$.

2. Fie $P = 0$. Atunci $x_1 = 0$ și $x_2 = S$.

Exemple. 1) Fie ecuația $2x^2 - 8x + 7 = 0$. Avem $\Delta = 64 - 56 = 8 > 0$. Deci ecuația are două rădăcini diferite. Cum $x_1 x_2 = \frac{7}{2}$ și $x_1 + x_2 = \frac{8}{2} = 4$, adică suma și produsul rădăcinilor sînt pozitive, rezultă că ambele rădăcini sînt pozitive.

2) Fie ecuația $x^2 + 2x - 15 = 0$. Avem $\Delta = 4 + 60 = 64 > 0$, deci ecuația are două rădăcini diferite. Deoarece $x_1 x_2 = -15$ și $x_1 + x_2 = -2$, rezultă că rădăcinile au semne diferite și valoarea absolută a rădăcinii negative este mai mare decât rădăcina pozitivă.

2.4. Descompunerea trinomului de gradul al doilea în produs de polinoame de gradul întâi

Fie polinomul de gradul al doilea $aX^2 + bX + c$, $a \neq 0$, în nedeterminată* X . Un astfel de polinom se numește *trinom de gradul al doilea*.

1. Să presupunem că ecuația $ax^2 + bx + c = 0$ are rădăcini reale, fie acestea x_1 și x_2 . Atunci

$$aX^2 + bX + c = a(X - x_1)(X - x_2)$$

sau

$$aX^2 + bX + c = (aX - ax_1)(X - x_2).$$

Așadar, dacă $b^2 - 4ac \geq 0$, atunci trinomul $aX^2 + bX + c$, $a \neq 0$, se descompune în produs de factori de gradul întâi cu coeficienți reali.

2. Reciproc, fie trinomul $aX^2 + bX + c$, $a \neq 0$, și să presupunem că acesta se descompune în produs de factori de gradul întâi cu coeficienți reali, adică

$$aX^2 + bX + c = (a_1X + b_1)(a_2X + b_2), \quad (1)$$

* Nedeterminata polinomului se notează, uzual, cu literă mare.

unde a_1, b_1, a_2, b_2 sînt numere reale. Atunci rădăcinile ecuației $ax^2 + bx + c = 0$ sînt reale.

Într-adevăr, din relația (1), identificînd coeficienții lui X^2 , avem $a = a_1 a_2$. Cum $a \neq 0$, rezultă că $a_1 \neq 0$ și $a_2 \neq 0$. Produsul $(a_1 x + b_1) \cdot (a_2 x + b_2)$ este zero pentru $x = -\frac{b_1}{a_1}$ sau $x = -\frac{b_2}{a_2}$ și deci ecuația $ax^2 + bx + c = 0$ are rădăcinile reale $-\frac{b_1}{a_1}$ și $-\frac{b_2}{a_2}$.

Exemple. 1) Să se descompună trinomul $6X^2 - X - 1$, în factori de gradul întâi cu coeficienți reali.

Rădăcinile ecuației $6x^2 - x - 1 = 0$ sînt: $x_1 = \frac{1}{2}$ și $x_2 = -\frac{1}{3}$.

Atunci.

$$6X^2 - X - 1 = 6\left(X - \frac{1}{2}\right)\left(X + \frac{1}{3}\right) = (2X - 1)(3X + 1).$$

2) Deoarece discriminantul ecuației $x^2 + x + 2 = 0$ este $\Delta = 1 - 8 = -7 < 0$, rezultă că trinomul $X^2 + X + 2$ nu se descompune în factori de gradul întâi cu coeficienți reali.

EXERCITII

1. Să se rezolve ecuațiile în x :

a) $4x + 1 = m$; b) $mx - m^2 = 4 - 2x$; c) $x = n - m^2 x$;

d) $\frac{m}{x-2} = \frac{x+1}{x^2-4}$; e) $m = \frac{1-nx}{1+nx}$; f) $1 + |x| = m$;

g) $|7x - 1| = 21 - 9x$; h) $|1 - 3x| = |3 - 2x|$; i) $|10 + x| = -10 - x$;

j) $|x + 1| + |x - 1| + |x - 3| = 3 + x$; k) $||x| - 1| = 13$.

2. Să se rezolve inecuațiile:

a) $7x - 6 < x + 12$; b) $-\frac{2}{3-x} > 0$; c) $\frac{ax+b}{a-b} > \frac{ax-b}{a+b}$ ($a > 0, b > 0$);

d) $ax + b > 3 - 2x$; e) $x + \frac{x-1}{a+1} > \frac{x+1}{a+1} - ax$; f) $|x + 3| \leq 5$;

g) $|2x - 1| < |x - 1|$; h) $|x - 2| + |x - 1| > 1$.

3. Să se determine valorile lui x pentru care există radicalii următori (în mulțimea numerelor reale):

a) $\sqrt{8 + 3x}$; b) $\sqrt{6 - x}$; c) $\sqrt{2x + 6}$; d) $\sqrt{1 - 3x} + \sqrt{x}$.

4. Să se rezolve ecuațiile:

a) $6x^2 - x - 1 = 0$; b) $x^2 - x + 1 = 0$; c) $-x^2 + 8x - 16 = 0$;

d) $\frac{3x-7}{x+5} = \frac{x-3}{x+2}$; e) $\frac{5}{x+2} + \frac{9}{2x+3} = 2$;

$$f) \frac{6}{x^2 - 1} + \frac{3}{x + 1} = \frac{2}{x - 1} + 1;$$

$$g) \frac{5}{x + m} - \frac{1}{m - x} = 2 + \frac{10m}{m^2 - x^2}; \quad h) \frac{x - 6}{x - 12} - \frac{x - 12}{x - 6} = \frac{5}{6}.$$

5. Să se determine m , astfel încât ecuația $x^2 + mx + 1 = 0$;

a) să aibă rădăcini egale; b) să aibă rădăcini reale diferite; c) să nu aibă rădăcini reale.

6. Același enunț ca la problema 5, pentru ecuația $x^2 - 2mx + m(1 + m) = 0$.

7. Să se determine valorile lui m , știind că ecuațiile $x^2 + x + m = 0$ și $x^2 + x - m = 0$ au același număr de rădăcini reale.

8. Să se formeze ecuațiile de gradul al doilea, care au rădăcinile:

a) $x_1 = -3$ și $x_2 = 5$; b) $x_1 = m + n$ și $x_2 = m - n$; c) $x_1 = 2 + \sqrt{3}$ și $x_2 = 2 - \sqrt{3}$; d) $x_1 = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ și $x_2 = \sqrt{2} - \sqrt{3}$.

9. Fie x_1 și x_2 rădăcinile ecuației $x^2 + px + q = 0$. Să se formeze ecuațiile de gradul al doilea în y , ale căror rădăcini sînt:

a) $y_1 = \frac{x_1}{x_2}$ și $y_2 = \frac{x_2}{x_1}$; b) $y_1 = x_1 + \frac{1}{x_2}$ și $y_2 = x_2 + \frac{1}{x_1}$; c) $y_1 = (x_1 + x_2)^2$ și $y_2 = (x_1 - x_2)^2$; d) $y_1 = \frac{1}{x_1^2}$ și $y_2 = \frac{1}{x_2^2}$.

10. Fără a rezolva ecuațiile următoare, să se determine semnele rădăcinilor lor:

a) $x^2 - x - 6 = 0$; b) $6x^2 - x - 1 = 0$; c) $-5x^2 + x - 7 = 0$.

11. Să se determine valorile lui m , astfel încît rădăcinile ecuației $x^2 + (1 - m)x - m = 0$ să aibă:

a) același semn; b) semne diferite.

12. Să se descompună în factori de gradul întâi trinoamele:

a) $6X^2 - 7X + 2$; b) $X^2 - X + 1$; c) $2X^2 - 7mX + 6m^2$.

13. Să se determine valorile lui m , astfel încît ecuațiile

$x^2 + mx + 1 = 0$ și $x^2 + x + m = 0$ să aibă o rădăcină comună.

14. Să se studieze semnul rădăcinilor ecuației:

$mx^2 + 2(m + 1)x + |m - 2| = 0$, m fiind un parametru real.

15. Fie ecuația $4mx^2 + 4(1 - 2m)x + 3(m - 1) = 0$. Să se determine valorile lui m astfel încît să avem:

a) ambele rădăcini să fie mai mici decît 1;
b) ambele rădăcini să fie mai mari decît 1;
c) o rădăcină mai mică decît 1 și alta mai mare decît 1.

16. Să se determine valorile parametrului m , astfel încît următoarele ecuații să aibă două rădăcini egale:

a) $4x^2 + mx + 9 = 0$; b) $mx^2 + 4x + 1 = 0$;
c) $x^2 - 2(1 + 3m)x + 7(3 + 2m) = 0$.

17. Descompunînd membrul stîng în factori, să se rezolve ecuațiile:

a) $4x^3 + 28x^2 - 9x - 63 = 0$; b) $6x^3 - x^2 - 486x + 81 = 0$;
c) $x^3 + 3x^2 - 16x - 48 = 0$.

18. Să se rezolve ecuațiile:

$$a) \frac{1}{5x-5} + \frac{2x-1}{12x^2+12x} - \frac{1}{5x^3-5} = 0;$$

$$b) \frac{3x-5}{x^2-1} - \frac{6x-5}{x-x^2} - \frac{3x+2}{x^2-x} = 0.$$

19. Să se rezolve ecuațiile:

$$a) x^4 + 4x - 1 = 0; \quad b) x^4 - 4x^3 - 1 = 0;$$

$$c) \left(\frac{x}{x+1} \right)^2 + \left(\frac{x}{x-1} \right)^2 = m(m-1).$$

Indicație. a) Adunăm la ambii membri pe $2x^2 + 1$; se obține ecuația $x^2 + 1 = \sqrt{2} |x - 1|$. b) Se înlocuiește x cu $\frac{1}{x}$ și se obține ecuația de la punctul a). c) Adunăm la ambii membri ai ecuației pe $\frac{2x^2}{x^2-1}$ și obținem ecuația

$$y^2 - y - m(m-1) = 0, \text{ unde } y = \frac{2x^2}{x^2-1}.$$

20. Fie ecuația $x^2 - |x| = mx(x+1)$. Să se determine m ($m \in \mathbb{R}$) astfel încât această ecuație să aibă trei rădăcini reale.

Indicație. Se consideră cazurile: a) $x \geq 0$, $x^2 - x = mx(x+1)$; b) $x < 0$, $x^2 + x = mx(x+1)$.

21. Să se rezolve ecuațiile în x , m fiind un parametru real:

$$a) 3x^2 - 5mx - 2m^2 = 0; \quad b) x(2x+5) - m(x+3) = 3.$$

Indicație. a) $\Delta = 49m^2 \geq 0$. Dacă $m \neq 0$, atunci $x = \frac{5m \pm |7m|}{6}$, de unde

$$x_1 = -\frac{1}{3}m \text{ și } x_2 = 2m. \text{ Dacă } m = 0, \text{ atunci } x_1 = x_2 = 0.$$

b) $\Delta = (m+7)^2$. Dacă $m = -7$, atunci $\Delta = 0$ și rezultă $x_1 = x_2 = -3$. Dacă $m \neq -7$, atunci $\Delta > 0$ și $x = \frac{m-5 \pm |m+7|}{4}$, de unde $x_1 = \frac{m+1}{2}$ și $x_2 = -3$.

CAPITOLUL II

ELEMENTE DE LOGICĂ MATEMATICĂ, MULȚIMI, FUNCȚII

§ 1. ELEMENTE DE LOGICĂ MATEMATICĂ

1.1. Elemente de calculul propozițiilor

Noțiunea de propoziție. Se numește *propoziție un enunț** despre care știm că este sau adevărat sau fals, însă nu și una și alta simultan.

Exemple. Considerăm enunțurile: 1) În orice triunghi suma unghiurilor sale este egală cu 180° ; 2) „ $3 + 2 = 5$ ”; 3) „ $2 > 5$ ”; 4) „Balena este un mamifer”; 5) „Planeta Venus este satelit al Pământului”.

Toate aceste enunțuri sînt propoziții, deoarece despre fiecare putem să știm dacă este adevărată sau falsă. De exemplu 1), 2) și 4) sînt propoziții adevărate, iar 3) și 5) sînt propoziții false.

Observație. O clasă foarte largă de propoziții adevărate o constituie teoremele din matematică.

Exemple. Considerăm enunțurile: 1) „ $x + 2 = 5$ ”; 2) „ $x - 1 < 4$ ”; 3) „Deschide ușa!”; 4) „Numărul x divide numărul y ”; 5) „Atomul de aur este galben”.

Se observă că 1), 2), 3), 4) și 5) sînt enunțuri pentru care condiția de mai sus (de a fi adevărat sau fals) nu este îndeplinită. Mai exact enunțurile 1), 2) și 4) au caracter variabil (vom vedea că ele sînt predicate). Enunțul 3) este o poruncă (ordin) despre care este lipsit de sens să afirmăm că este adevărat sau fals. Enunțul 5) este absurd, deoarece este lipsit de sens să vorbim despre culoarea unui atom.

Valoare de adevăr. Dacă o propoziție este adevărată, spunem că ea are *valoarea de adevăr* „adevărul” și vom nota valoarea de adevăr, în acest caz, prin semnul „1” (sau „a”); cînd propoziția este falsă spunem că ea are *valoarea de adevăr* „falsul” și vom nota valoarea de adevăr prin semnul „0” (sau „f”).

Observație. „0” și „1” sînt aici simboluri fără înțeles numeric.

Vom nota propozițiile cu literele p, q, r, \dots sau p_1, p_2, p_3, \dots . Acestea se pot compune cu ajutorul așa-numiților conectori logici „non”, „și”, „sau” dînd propoziții din ce în ce mai complexe. Să indicăm, în cele ce urmează, modul de obținere de noi propoziții cu ajutorul conectorilor logici.

* Un enunț este un asamblaj de semne cărora li s-a dat un sens.

Negația propozițiilor. *Negația propoziției p este propoziția „non p ”, care se notează $\neg p$ și care este adevărată când p este falsă și falsă când p este adevărată*.*

Valoarea de adevăr a propoziției $\neg p$ este dată în tabela următoare:

p	$\neg p$
1	0
0	1

De exemplu, considerăm propoziția p : „Balena este un mamifer”. Negația $\neg p$ este propoziția: „Non balena este un mamifer sau, în limbajul obișnuit, „Balena nu este un mamifer”. În acest exemplu $\neg p$ este o propoziție falsă.

Conjuncția propozițiilor. *Conjuncția propozițiilor p, q este propoziția care se citește „ p și q ” (notată $p \wedge q$) care este adevărată atunci și numai atunci când fiecare din propozițiile p, q este adevărată.*

Valoarea de adevăr a propoziției $p \wedge q$ este dată în tabela următoare:

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

De exemplu, să considerăm propozițiile p : „ $2 + 4 = 6$ ” și q : „Luna este satelit al Pământului”. Propoziția $p \wedge q$ este „ $2 + 4 = 6$ și Luna este satelit al Pământului”. În acest exemplu $p \wedge q$ este o propoziție adevărată, deoarece p, q sînt amîndouă propoziții adevărate. Deseori în loc de $p \wedge q$ se mai folosește și notația $p \& q$.

Disjuncția propozițiilor. *Disjuncția propozițiilor p, q este propoziția care se citește „ p sau q ” (notată $p \vee q$) și care este adevărată atunci și numai atunci când este adevărată cel puțin una dintre propozițiile p, q .*

Valoarea de adevăr a propoziției $p \vee q$ este dată în tabela următoare:

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

De exemplu, să considerăm propozițiile p : „ $2 > 3$ ” și q : „Balena este un pește”. Propoziția $p \vee q$: „ $2 > 3$ sau balena este un pește” este o propoziție falsă, deoarece p, q sînt amîndouă propoziții false.

Cu propozițiile p, q, r, \dots am construit propozițiile: $\neg p, p \wedge q, p \vee q, \dots$. Din acestea obținem alte propoziții, ca de exemplu: $(\neg p) \vee q, (\neg p) \wedge (\neg q), (\neg p \vee q) \wedge r$ etc.

* Negația propoziției p se mai notează \bar{p} .

Propozițiile care se obțin din propozițiile p, q, r, \dots (numite *propoziții simple*), aplicând de un număr finit de ori conectorii logici „ \neg, \wedge, \vee “, se vor numi *propoziții compuse*. *Calculul propozițiilor* studiază propozițiile compuse din punctul de vedere al adevărului sau falsului lor în raport cu valorile logice ale propozițiilor simple care le compun.

Implicația propozițiilor. Să considerăm propoziția compusă $(\neg p) \vee q$ a cărei valoare de adevăr rezultă din tabela următoare:

p	q	$\neg p$	$(\neg p) \vee q$
1	1	0	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	0	1	1

Observăm că propoziția compusă $(\neg p) \vee q$ este falsă atunci și numai atunci când p este adevărată și q falsă, în celelalte cazuri fiind adevărată.

Propoziția compusă $(\neg p) \vee q$ se notează $p \rightarrow q$ și se citește, „dacă p , atunci q “ sau „ p implică q “. Ea se numește *implicația propozițiilor p, q* (în această ordine).

În implicația „ $p \rightarrow q$ “, p se numește *ipoteza* sau *antecedentul* implicației, iar propoziția q se numește *concluzia* sau *consecventul* implicației.

De exemplu, să considerăm propozițiile p : „ $2 \cdot 2 = 5$ “ și q : „Balena este un mamifer“. Propoziția $p \rightarrow q$ este „dacă $2 \cdot 2 = 5$, atunci balena este un mamifer“, care este o propoziție adevărată deoarece p este falsă, iar q adevărată.

Observație. Deseori se întâmplă ca propozițiile compuse pe care le obținem să fie „bizare“ ca în exemplul dat mai sus la implicație. Din punctul de vedere al logicii matematice, în studiul propozițiilor compuse ne interesează numai valoarea lor de adevăr.

Echivalența propozițiilor. Cu propozițiile p, q putem forma propoziția compusă $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$, care se notează $p \leftrightarrow q$ și se citește „ p dacă și numai dacă q “. Din tabela de mai jos se vede că propoziția $p \leftrightarrow q$ este adevărată atunci și numai atunci când p și q sînt în același timp adevărate sau false.

p	q	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$p \leftrightarrow q$
1	1	1	1	1
1	0	0	1	0
0	1	1	0	0
0	0	1	1	1

Formule echivalente în calculul propozițional

Așa cum în clasele mici cu literele $a, b, c, \dots, x, y, z, \dots$ și simbolurile $+, -, :$ putem forma expresiile algebrice, așa și în calculul propozițional cu literele p, q, r, \dots (sau p_1, p_2, p_3, \dots) și cu simbolurile conectorilor logici: $\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$ putem să formăm diverse expresii numite *formule ale calculului propozițional*. Formulele calculului propozițional le notăm cu literele $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots$

Exemple: $p \vee q$, $(p \vee q) \wedge r$, $(p \vee q) \rightarrow (p \wedge q)$, $(p \vee r) \rightarrow p$, $\neg p \rightarrow p$ sînt formule ale calculului propozițional.

Fiind dată o formulă $\alpha = \alpha(p, q, r, \dots)$ în scrierea căreia intră literele p, q, r, \dots , ori de cîte ori înlocuim literele p, q, r, \dots cu diverse propoziții obținem o nouă propoziție (adevărată sau falsă) care se va numi valoarea formulei α pentru propozițiile p, q, r, \dots date.

Observație. Cititorul poate să facă imediat legătura cu valoarea unei expresii algebrice pentru diverse valori numerice date literelor ce o compun.

O formulă $\alpha(p, q, r, \dots)$ care are valoarea o propoziție adevărată indiferent cum sînt propozițiile p, q, r, \dots se numește *formulă identic adevărată sau tautologie*.

Două formule α și β în scrierea cărora intră literele p, q, r, \dots se zic *echivalente dacă și numai dacă pentru orice înlocuire a literelor p, q, r, \dots cu diverse propoziții, valorile celor două formule sînt propoziții (compuse) care au aceeași valoare de adevăr*.

Cînd două formule α și β sînt echivalente scriem $\alpha \equiv \beta$.

Observație. Și aici cititorul poate să-și dea seama imediat că echivalența formulelor în calculul propozițional este analoagă noțiunii de identitate a două expresii algebrice.

Pentru a dovedi că două formule ale calculului propozițional sînt echivalente se folosesc tabelele de adevăr.

Exemple. 1). Fie $\alpha = \neg(p \vee q)$ și $\beta = (\neg p) \wedge (\neg q)$. Din tabela de mai jos rezultă că $\alpha \equiv \beta$.

p	q	$p \vee q$	α	$\neg p$	$\neg q$	β
1	1	1	0	0	0	0
1	0	1	0	0	1	0
0	1	1	0	1	0	0
0	0	0	1	1	1	1

2) Fie $\gamma = \neg(p \wedge q)$ și $\delta = (\neg p) \vee (\neg q)$. Din tabela de mai jos rezultă că $\gamma \equiv \delta$:

p	q	$p \wedge q$	γ	$\neg p$	$\neg q$	δ
1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	1	0	1	1
0	1	0	1	1	0	1
0	0	0	1	1	1	1

EXERCITII

1. Să se decidă care din enunțurile următoare sînt propoziții și ce valori de adevăr au:

a) $2 \cdot 3 = 6$; b) $(2 + 5) \cdot (3 + 8) = 80$; c) $|x| > 0$ (x număr real); d) Oricare ar fi numărul real x avem $|x| \geq 0$; e) Închide cartea!; f) Există un număr real x , astfel încît $x^2 + 2x - 3 = 0$; g) Dreptele d și d' sînt paralele.

2. Din propozițiile p : „ $2 = 4$ ” și q : „ $3 < 5$ ” alcătuiți conjuncția, disjuncția, implicația și echivalența celor două propoziții.

3. Folosind tabelele de adevăr, să se verifice:

a) $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$; b) $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$;
c) $p \equiv \neg(\neg p)$; d) $p \rightarrow q \equiv \neg q \rightarrow \neg p$; e) $p \vee q \equiv q \vee p$ și $p \wedge q \equiv q \wedge p$.

4. Să se arate că următoarele propoziții au valoarea de adevăr „1” indiferent de propozițiile simple ce le compun:

- a) $p \rightarrow (p \vee q)$; b) $(p \wedge q) \rightarrow p$; c) $(p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q$;
d) $((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$; e) $(p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r))$;
f) $p \vee (\neg p)$; g) $\neg(p \wedge (\neg p))$.

1.2. Elemente de calculul predicatelor

Noțiunea de predicat are o importanță deosebită în matematică. Fără a exagera, aproape orice teoremă din matematică este un enunț ce conține unul sau mai multe predicate.

Noțiunea de predicat. Să considerăm enunțurile:

- 1) „ $x + 2 < 3$ ”; 2) „ x divide y ”.

Să luăm enunțul „ $x + 2 < 3$ ”. Se vede că dacă înlocuim x cu 2, obținem propoziția falsă, „ $2 + 2 < 3$ ”. Dacă facem $x = 0$, obținem propoziția adevărată „ $0 + 2 < 3$ ” etc.

Să considerăm enunțul „ x divide y ”. Pentru $x = 2$ și $y = 6$ obținem propoziția adevărată „2 divide 6”. Pentru $x = 4$ și $y = 6$ obținem propoziția falsă „4 divide 6” etc.

Un enunț care depinde de una sau mai multe variabile și are proprietatea că pentru orice „valori” date variabilelor corespunde o propoziție (adevărată sau falsă) se numește predicat (sau propoziție cu variabile). Predicatele sînt: unare, binare, ternare etc., după cum depind respectiv de 1, 2, 3, ... variabile. Notăm predicatele cu $p(x, y, z, \dots)$, $q(x, y, z, \dots)$... Ori de cîte ori definim un predicat, trebuie să indicăm și mulțimile în care variabilele iau valori.

Exemple. 1) Enunțul $p(x)$: „ $x - 1 = 7$ ”, unde x desemnează un număr întreg, este un predicat unar.

2) Enunțul $p(x, y)$: „ x este frate cu y ”, unde x, y desemnează oameni, este un predicat binar.

3) Enunțul $p(x, y, z)$: „ $x = y + z$ ”, unde x, y, z desemnează numere întregi, este un predicat ternar.

4) Dacă avem două predicate $P = p(x, y, z, \dots)$ și $Q = q(x, y, z, \dots)$, care conțin aceleași variabile, putem forma cu ajutorul conectorilor logici noi predicate: $\neg P$, $P \wedge Q$, $P \vee Q$, $P \rightarrow Q$, $P \longleftrightarrow Q$ ș.a.

Așa, spre exemplu, pentru predicatul $p(x)$, $\neg p(x)$ este predicatul cărui pentru fiecare valoare $x = x_0$ îi corespunde propoziția $\neg p(x_0)$.

Cuantificatorul existențial (\exists) și cuantificatorul universal (\forall). Strîns legată de noțiunea de predicat apare noțiunea de cuantificator. Fie predicatul unar $p(x)$, unde x desemnează un element oarecare din mulțimea E . Putem forma enunțul:

„există cel puțin un x din E astfel încît $p(x)$ ”, care se notează $(\exists x) p(x)$. Acest enunț este o propoziție, care este adevărată cînd există cel puțin un element x_0 din E , astfel încît propoziția $p(x_0)$ este adevărată și este falsă cînd nu există nici un x_0 din E astfel încît $p(x_0)$ să fie adevărată.

Exemple. 1) Considerăm predicatul $p(x): „x + 3 = 0”$, unde x desemnează un număr întreg. Propoziția $(\exists x)(x + 3 = 0)$ este adevărată, deoarece pentru $x_0 = -3$ propoziția $p(-3): „-3 + 3 = 0”$ este adevărată.

3) Fie predicatul $p(x): „x^2 + 1 = 0”$, unde x desemnează un număr real. Propoziția $(\exists x)(x^2 + 1 = 0)$ este falsă, deoarece nu există nici un număr real x_0 astfel încît să avem $x_0^2 + 1 = 0$.

Cu predicatul $p(x)$ putem forma și enunțul:

„oricare ar fi x din E are loc $p(x)$ ”,

care se notează $(\forall x) p(x)$. Acest enunț este o propoziție, care este adevărată dacă pentru orice element x_0 din E , $p(x_0)$ este adevărată și este falsă în cazul cînd există cel puțin un x_0 din E pentru care $p(x_0)$ este falsă.

Exemple. 1) Fie predicatul $p(x): „x + 3 = 0”$, unde x desemnează un număr întreg. Propoziția $(\forall x)(x + 3 = 0)$ este falsă, deoarece de exemplu pentru $x_0 = 4$, propoziția $p(4): „4 + 3 = 0”$ este falsă.

2) Considerăm predicatul $p(x): „x^2 \geq 0”$ unde x desemnează un număr întreg. Propoziția $(\forall x)(x^2 \geq 0)$ este adevărată, deoarece pentru orice număr întreg x_0 avem $x_0^2 \geq 0$.

Echivalența predicatelor. Două predicate $p(x, y, z, \dots)$, $q(x, y, z, \dots)$ se zic echivalente și scriem $p(x, y, z, \dots) \Leftrightarrow q(x, y, z, \dots)$, dacă oricum am alege valorile variabilelor x_0, y_0, z_0, \dots , propozițiile $p(x_0, y_0, z_0, \dots)$ și $q(x_0, y_0, z_0, \dots)$ au aceeași valoare de adevăr. Dacă oricum am alege valorile variabilelor x_0, y_0, z_0, \dots pentru care propoziția $p(x_0, y_0, z_0, \dots)$ este adevărată rezultă că și propoziția $q(x_0, y_0, z_0, \dots)$ este adevărată, vom scrie

$$p(x, y, z, \dots) \Rightarrow q(x, y, z, \dots).$$

Se vede că $p(x, y, z, \dots) \Leftrightarrow q(x, y, z, \dots)$ atunci și numai atunci cînd $p(x, y, z, \dots) \Rightarrow q(x, y, z, \dots)$ și $q(x, y, z, \dots) \Rightarrow p(x, y, z, \dots)$.

Exemple. 1) Considerăm predicatele $p(x): „x < 0”$ și $q(x): „x \geq 0”$ unde x desemnează un număr real. Se observă că

$$\neg p(x) \Leftrightarrow q(x) \text{ și } \neg q(x) \Leftrightarrow p(x).$$

2) Considerăm predicatele $p(x, y): „x = y”$ și $q(x, y): „x \neq y”$, unde x, y desemnează numere reale. Se observă că

$$\neg p(x, y) \Leftrightarrow q(x, y).$$

3) Considerăm predicatele $p(x): „x > 0”$ și $q(x): „x^2 > 0”$, unde x desemnează un număr real.

Se vede că $p(x) \Rightarrow q(x)$, dar nu are loc implicația $q(x) \Rightarrow p(x)$, deoarece pentru $x_0 = -1$, propoziția $q(-1): „(-1)^2 > 0”$ este adevărată, pe cînd propoziția $p(-1): „-1 > 0”$ este falsă.

Reguli de negație. Fie $p(x)$ un predicat unar, unde x desemnează un element din mulțimea E . Atunci

$$1) \neg((\exists x) p(x)) \equiv (\forall x) \neg p(x),$$

$$2) \neg((\forall x) p(x)) \equiv (\exists x) \neg(p(x))$$

(aici semnul „ \equiv ” desemnează faptul că cele două propoziții au aceeași valoare de adevăr).

Exemple. 1) Să considerăm predicatul $p(x)$: „ $x - 2 = 3$ “, unde x desemnează un număr întreg. Propoziția $(\exists x) p(x)$ este adevărată deoarece pentru $x_0 = 5$, propoziția $p(x_0)$: „ $5 - 2 = 3$ “ este adevărată. Atunci propoziția $\neg(\exists x) p(x)$ este falsă. Pe de altă parte, predicatul $\neg p(x)$ este echivalent cu predicatul „ $x - 2 \neq 3$ “. Propoziția $(\forall x) (x - 2 \neq 3)$ este falsă, deoarece pentru $x_0 = 5$, propoziția „ $5 - 2 \neq 3$ “ este falsă. Deci am verificat că

$$\neg(\exists x) (x - 2 = 3) \equiv (\forall x) \neg(x - 2 = 3).$$

2) Considerăm predicatul $p(x)$: „ $x > 0$ “, unde x desemnează un număr întreg. Propoziția $(\forall x)(x > 0)$ este falsă, deoarece pentru $x_0 = -1$, „ $-1 > 0$ “ este o propoziție falsă. Atunci, propoziția $\neg((\forall x)(x > 0))$ este adevărată.

Pe de altă parte, $\neg p(x)$ este echivalent cu predicatul „ $x \leq 0$ “. Propoziția $(\exists x) (x \leq 0)$ este adevărată. Deci am verificat că

$$\neg((\forall x) (x > 0)) \equiv (\exists x) \neg(x > 0).$$

Predicate de mai multe variabile. Fie $p(x, y)$ un predicat binar. Folosind cuantificatorii (\exists) și (\forall) , putem forma predicatele unare: $(\exists x) p(x, y)$ și $(\forall x) p(x, y)$, unde y este variabila acestor două predicate (y se zice *variabilă liberă*, iar x *variabilă legată*). Din aceste două predicate unare putem forma propozițiile:

$$„(\exists y) (\exists x) p(x, y), (\forall y) (\exists x) p(x, y), (\exists y) (\forall x) p(x, y) \text{ și } (\forall y) (\forall x) p(x, y)“.$$

Semnalăm următoarele proprietăți de comutativitate ale cuantificatorului de același fel:

$$(\forall x) (\forall y) p(x, y) \equiv (\forall y) (\forall x) p(x, y)$$

$$(\exists x) (\exists y) p(x, y) \equiv (\exists y) (\exists x) p(x, y).$$

Din regulile de negație pentru predicatele unare obținem regulile de negație pentru predicatele binare.

$$\text{De exemplu: } \neg((\exists x) (\exists y) p(x, y)) \equiv (\forall x) (\forall y) \neg p(x, y).$$

Într-adevăr: $\neg((\exists x) (\exists y) p(x, y)) \equiv (\forall x) \neg((\exists y) p(x, y)) \equiv (\forall x) (\forall y) \neg p(x, y)$. Considerații analoage se pot face pentru predicate cu 3, 4 sau mai multe variabile.

Observații. 1) Dacă $p(x, y, z, \dots)$ și $q(x, y, z, \dots)$ sînt două predicate, atunci $p(x, y, z, \dots) \Leftrightarrow q(x, y, z, \dots)$ dacă și numai dacă este adevărată propoziția: $(\forall x) (\forall y) (\forall z) \dots [p(x, y, z, \dots) \Leftrightarrow q(x, y, z, \dots)]$. De asemenea, $p(x, y, z, \dots) \Rightarrow q(x, y, z, \dots)$ atunci și numai atunci cînd este adevărată propoziția:

$$(\forall x) (\forall y) (\forall z) \dots [p(x, y, z, \dots) \rightarrow q(x, y, z, \dots)].$$

2) *Multe teoreme se scriu sub forma implicației*

$$p(x, y, z, \dots) \Rightarrow q(x, y, z, \dots).$$

1° Considerăm teorema: în orice triunghi medianele sînt concurente. Această teoremă este de forma $p(x, y, z) \Rightarrow q(x, y, z)$, unde $p(x, y, z)$ este predicatul ternar: „ x, y, z sînt medianele unui triunghi“ iar $q(x, y, z)$ este predicatul: „ x, y, z sînt concurente“.

2° Fie teorema: dacă ABC este un triunghi dreptunghic, atunci $BC^2 = AB^2 + AC^2$. Această teoremă este de forma:

$$p(x, y, z) \Rightarrow q(x, y, z),$$

unde $p(x, y, z)$ este predicatul: „ x, y, z sînt laturile unui triunghi dreptunghic $\wedge (x < y < z)$ “, iar $q(x, y, z)$ este predicatul: „ $z^2 = x^2 + y^2$ “.

3°. Teorema următoare: „Între două numere raționale distincte se găsește un număr rațional diferit de acestea“, se scrie sub forma:

$p(x, y) \Rightarrow q(x, y)$, unde $p(x, y)$ este predicatul: „ $(x \neq y) \wedge (x < y)$ “, iar $q(x, y)$ este predicatul: „ $(\exists z) [(x < z) \wedge (z < y)]$ “.

EXERCITII

1. Fie, predicatul $p(x, y)$: „ x divide y “ unde x, y desemnează numere naturale.

a) Să se determine valorile de adevăr pentru propozițiile: $p(2, 6)$, $p(7, 15)$, $p(20, 100)$, $p(45, 100)$.

b) Să se determine valorile de adevăr ale propozițiilor:

$(\forall x) (\forall y) p(x, y)$, $(\forall x) (\exists y) p(x, y)$, $(\forall y) (\exists x) p(x, y)$, $(\exists x) (\exists y) p(x, y)$.

2. Fie predicatul $p(x)$: „ $x^2 - 2x + 3 = 0$ “ unde x desemnează un număr real. Să se determine valorile de adevăr pentru propozițiile: $(\exists x) p(x)$ și $(\forall x) p(x)$. Să se verifice regulile de negație.

3. Pentru orice predicat binar $p(x, y)$, să se verifice că propoziția $(\exists x) (\forall y) p(x, y) \rightarrow (\forall y) (\exists x) p(x, y)$ este adevărată.

4. Fie predicatul $p(x, y)$: „ $x + y = 2$ “ unde x, y , desemnează numere întregi. Să se spună dacă propoziția $(\forall y) (\exists x) (p(x, y) \rightarrow (\exists x) (\forall y) p(x, y))$ este adevărată sau falsă.

5. Să se determine valoarea de adevăr a propozițiilor:

a) $(\forall x) [(x > 0) \vee (x < 0) \vee (x = 0)]$, unde x desemnează un număr real oarecare;

b) $(\exists x) (\exists y) [(x \neq 0) \wedge (y \neq 0) \rightarrow (xy = 0)]$, unde x, y sînt numere oarecare.

§ 2. MULȚIMI

2.1. Noțiunea de mulțime

Noțiunile de mulțime și de element al unei mulțimi fac parte din categoria acelor noțiuni matematice care nu pot fi definite, dar sînt impuse de numeroase exemple: 1) mulțimea cuvintelor din limba română; 2) mulțimea elevilor dintr-o clasă; 3) mulțimea numerelor naturale: 0, 1, 2, 3, ... etc.

Așa cum scria Cantor, creatorul teoriei mulțimilor, o mulțime este „o colecție de obiecte (numite elementele mulțimii) de natură oarecare, bine determinate și bine distincte“.

Vom nota cu litere mari mulțimile, cu litere mici elementele lor. Dacă A este o mulțime și x un element al său, vom scrie $x \in A$ și vom citi „ x aparține lui A “. Dacă x nu se găsește în A , atunci vom scrie $x \notin A$ și vom citi „ x nu aparține lui A “.

Așa cum rezultă din fraza de mai sus, elementele unei mulțimi sînt distincte, adică un același element nu se poate repeta de mai multe ori. De asemenea, elementele unei mulțimi trebuie să fie bine determinate. Există două moduri de definire (de determinare) a unei mulțimi:

a) *Numind individual elementele sale.* În acest caz mulțimea se specifică scriind între acolade elementele sale: $\{x, y, z, \dots\}$. De exemplu: $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ adică mulțimea formată din primele șase numere naturale; $B = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$, adică mulțimea formată din primele patru litere mici ale alfabetului grec.

b) *Specificând o proprietate pe care o au elementele sale și nu o au alte elemente.* Mai precis, dată o proprietate, se poate vorbi de mulțimea acelor obiecte pentru care proprietatea respectivă are loc. Mulțimile definite în acest mod se vor nota prin

$$A = \{x \mid P(x)\},$$

adică mulțimea acelor obiecte x , pentru care are loc $P(x)$.

Exemple. 1). Considerăm proprietatea: „este număr prim par”. În acest caz mulțimea este $\{2\}$.

2) Dacă considerăm proprietatea: „număr natural par” în acest caz A este mulțimea numerelor naturale pare.

O mulțime definită după primul mod se zice că este dată *sintetic*, iar o mulțime definită în al doilea mod se zice că este dată *analitic*.

O mulțime care are un număr finit de elemente se zice *finită*. În caz contrar se numește *infinită*. De exemplu: mulțimea elevilor dintr-o clasă, mulțimea oamenilor de pe glob, sînt mulțimi finite. Mulțimea numerelor naturale, mulțimea numerelor naturale pare, sînt mulțimi infinite.

În teoria mulțimilor se admite existența unei mulțimi care nu are nici un element; aceasta se numește mulțimea *vidă* și se notează cu simbolul \emptyset .

Notatii. Cu \mathbf{N} vom nota mulțimea numerelor naturale:

$\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$; cu \mathbf{Z} mulțimea numerelor întregi; cu \mathbf{Q} mulțimea numerelor raționale, iar cu \mathbf{R} mulțimea numerelor reale. Dacă a și b sînt două numere reale cu $a < b$, vom nota cu:

$[a, b] = \{x \mid x \in \mathbf{R}, a \leq x \leq b\}$, numit *interval închis* cu extremitățile a și b ;

$[a, b) = \{x \mid x \in \mathbf{R}, a \leq x < b\}$, numit *interval închis la stînga și deschis la dreapta*;

$(a, b] = \{x \mid x \in \mathbf{R}, a < x \leq b\}$, numit *interval deschis la stînga și închis la dreapta*.

Dacă $a \in \mathbf{R}$, notăm cu:

$[a, \infty) = \{x \mid x \in \mathbf{R}, a \leq x\}$, (respectiv $(a, \infty) = \{x \mid x \in \mathbf{R}, a < x\}$), numit *interval închis la stînga și nemărginit la dreapta* (respectiv *interval deschis la stînga și nemărginit la dreapta*).

De asemenea notăm cu:

$(-\infty, a] = \{x \mid x \in \mathbf{R}, x \leq a\}$ (respectiv $(-\infty, a) = \{x \mid x \in \mathbf{R}, x < a\}$), numit *interval închis la dreapta și nemărginit la stînga* (respectiv *interval deschis la dreapta și nemărginit la stînga*).

Se observă că toate aceste mulțimi sînt definite analitic.

2.2. Mulțimi egale

Se spune că mulțimea A este *egală* cu o mulțime B dacă orice element al lui A aparține lui B și reciproc. Notăm faptul că mulțimile A și B sînt egale astfel: $A = B$.

Exemple: 1) $\{1, 2, 3, 4, 5\} = \{4, 3, 2, 5, 1\}$.

2) Mulțimea $\{2\}$ este egală cu mulțimea numerelor naturale pare care sînt prime.

3) Mulțimile $\{2, 3, 4\}$ și $\{2, 3, 7, 10\}$ nu sînt egale.

Relația de egalitate între mulțimi are următoarele proprietăți:

i) este reflexivă, adică $A = A$;

ii) este simetrică: dacă $A = B$, atunci $B = A$;

iii) este tranzitivă: dacă $A = B$ și $B = C$, atunci $A = C$.

2.3. Relația de incluziune

Se spune că o mulțime A este *inclusă* în mulțimea B dacă orice element al mulțimii A este și element al mulțimii B . Se notează $A \subset B$ sau $B \supset A$. Dacă A nu este inclusă în B se scrie $A \not\subset B$. Altfel spus, $A \not\subset B$ înseamnă că există $x \in A$ astfel încît $x \notin B$.

Cînd A este inclusă în B se mai spune că B *conține* pe A sau că A este o *submulțime* (sau *parte*) a lui B .

Exemple. 1) $\{1, 2, 3\}$ este inclusă în $\{1, 2, 3, 5, 7\}$, adică $\{1, 2, 3\} \subset \{1, 2, 3, 5, 7\}$.

2) Mulțimea numerelor naturale pare este inclusă în mulțimea numerelor naturale.

3) $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$.

4) Se face convenția că pentru orice mulțime A , mulțimea vidă este inclusă în A , adică $\emptyset \subset A$.

5) Mulțimea $\{1, 2, 3\}$ nu este inclusă în mulțimea $\{2, 3, 5, 7\}$ deoarece $1 \notin \{2, 3, 5, 7\}$.

Fie A o mulțime și o proprietate $P(x)$; mulțimea elementelor din A care au proprietatea $P(x)$ se notează:

$$B = \{x \in A \mid P(x)\}.$$

Exemple. 1) Mulțimea numerelor naturale care se divid cu 5 se notează $A = \{x \in \mathbf{N} \mid 5 \text{ divide } x\}$.

2) Mulțimea numerelor întregi x cu proprietatea $7x + 8 = -6$ se scrie $A = \{x \in \mathbf{Z} \mid 7x + 8 = -6\}$. Se vede că $A = \{-2\}$.

Din definiția relației de incluziune rezultă că aceasta are următoarele proprietăți.

a) este reflexivă, adică $A \subset A$;

b) este antisimetrică, adică dacă $A \subset B$ și $B \subset A$, atunci $A = B$;

c) este tranzitivă, adică din $A \subset B$ și $B \subset C$ rezultă $A \subset C$.

Proprietatea b) se utilizează în practică în sensul că pentru a dovedi că $A = B$ se probează incluziunile $A \subset B$ și $B \subset A$.

Dacă A este o mulțime, atunci mulțimea care are ca elemente toate submulțimile lui A , se numește mulțimea părților lui A și se notează cu $\mathcal{P}(A)$. Așadar

$$\mathcal{P}(A) = \{X \mid X \subset A\}.$$

Observăm că mulțimea vidă \emptyset și mulțimea totală A sînt elemente ale lui $\mathcal{P}(A)$.

Exemple. Fie $A = \{1, 2, 3\}$. Avem

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}.$$

2.3. Operații cu mulțimi

1. Reuniunea mulțimilor

Definiție. Se numește *reuniunea* a două mulțimi A și B mulțimea tuturor elementelor care aparțin cel puțin uneia din mulțimile A sau B .

Notăm reuniunea mulțimilor A și B prin $A \cup B$ și citim „ A reunit cu B ”.

Deci $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ sau } x \in B\}$.

Exemple. 1) $\{1, 2, 3, 4\} \cup \{3, 4, 10, 12, 13\} = \{1, 2, 3, 4, 10, 12, 13\}$,

2) $\{a, b, c\} \cup \{c, d, e, f\} = \{a, b, c, d, e, f\}$.



Fig. II.1

Grafic, reuniunea a două mulțimi este reprezentată în figura II.1 prin porțiunea hașurată.

Observație. Așa cum am definit reuniunea a două mulțimi, putem defini reuniunea unui număr finit de mulțimi. Mai exact, dacă A_1, A_2, \dots, A_n sînt n mulțimi, atunci mulțimea elementelor x cu proprietatea „ x aparține cel puțin uneia din mulțimile A_1 sau A_2 sau ... sau A_n ” se numește reuniunea mulțimilor A_1, A_2, \dots, A_n și se notează $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$. Deci $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \{x \mid (\exists i) 1 \leq i \leq n \text{ astfel încît } x \in A_i\}$.

Exemple. 1) Fie $A_1 = \{1, 2\}$, $A_2 = \{2, 3, 4\}$ și $A_3 = \{1, 3, 5\}$. Atunci $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

2) Dacă $B_1 = \{1\}$, $B_2 = \{2, 5\}$, $B_3 = \{1, 2, 6\}$ și $B_4 = \{2, 5, 7\}$, atunci $B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4 = \{1, 2, 5, 6, 7\}$.

2. Intersecția mulțimilor

Definiție. Se numește *intersecția* a două mulțimi A și B mulțimea elementelor care aparțin și lui A și lui B .

Intersecția mulțimilor A și B se notează $A \cap B$ și se citește „ A intersectat cu B ”.

Deci: $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ și } x \in B\}$.

Mulțimile A și B se numesc *disjuncte* dacă $A \cap B = \emptyset$, adică dacă nu au în comun nici un element.

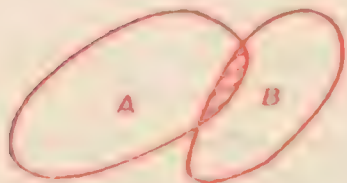


Fig. II.2

Exemple. $\{1, 2, 3\} \cap \{2, 5, 7, 8\} = \{2\}$;

2) $\{a, b, c, d, e\} \cap \{b, d, f\} = \{b, d\}$;

3) $\{1, 2, 3\} \cap \{4, 8, 9\} = \emptyset$.

Grafic, intersecția a două mulțimi este reprezentată în figura II.2 prin porțiunea hașurată.

Observație. Așa cum am definit intersecția a două mulțimi, putem defini intersecția unui număr finit de mulțimi. Mai exact dacă A_1, A_2, \dots, A_n sînt n mulțimi, atunci mulțimea elementelor x cu proprietatea „ x aparține și lui A_1 și lui A_2 ... și lui A_n ” se numește intersecția mulțimilor A_1, A_2, \dots, A_n și se notează $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$. Deci $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n = \{x \mid (\forall i) 1 \leq i \leq n \text{ avem } x \in A_i\}$.

Exemple 1) Fie $A_1 = \{1, 2, 3, 4\}$, $A_2 = \{1, 3, 4, 5\}$ și $A_3 = \{1, 4, 6\}$.

Atunci $A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \{1, 4\}$.

2) Dacă $B_1 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B_2 = \{1, 4, 5, 6\}$, $B_3 = \{1, 4, 5, 7\}$, $B_4 = \{4, 5, 6, 8\}$ și $B_5 = \{3, 4, 5\}$, atunci $B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap B_4 \cap B_5 = \{4, 5\}$.

3. Complementara unei submulțimi

Definiție. Fie E o mulțime și A o submulțime a lui E . Submulțimea lui E formată din acele elemente ce nu aparțin lui A se numește *complementara lui A în raport cu E* . Această mulțime se notează $C_E A$ (sau mai simplu CA cînd nu există nici un dubiu asupra mulțimii E).

Deci: $C_E A = \{x \in E \mid x \notin A\}$.

Exemple. 1) Dacă $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ și $A = \{1, 3, 5\}$, atunci $C_E A = \{2, 4\}$.

2) Dacă A este mulțimea numerelor naturale pare, atunci $C_N A$ este mulțimea numerelor naturale impare:

3) Dacă $E = \{a, b, c, d\}$ și $A = \{b, d\}$, atunci $C_E A = \{a, c\}$.

4) $C_E E = \emptyset$ și $C_E \emptyset = E$.

Grafic, complementara unei submulțimi A în raport cu mulțimea E este reprezentată în figura II.3 prin porțiunea hașurată.

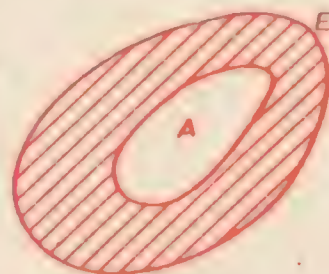


Fig. 11.3

4. Diferența a două mulțimi

Definiție. Fie A și B două mulțimi. Mulțimea formată din elementele lui A care nu sînt elemente ale lui B se numește *diferența dintre mulțimea A și mulțimea B* și se notează $A - B$.

Deci:

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ și } x \notin B\}.$$

Exemple. 1) $\{1, 2, 3, 4, 5\} - \{2, 4, 5, 7\} = \{1, 3\}$.

2) $\{a, b, c\} - \{d, e, f\} = \{a, b, c\}$.

3) $\{a, b, c\} - \{a, c\} = \{b\}$.

Grafic, diferența dintre A și B este reprezentată în figura II.4 prin porțiunea hașurată.

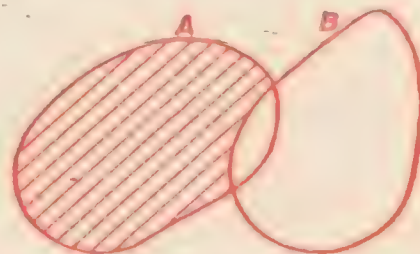


Fig. 11.4

5. Produs cartezian

Definiție. Se numește *pereche ordonată (cuplu)* formată din elementele x și y o ordine între elementele x și y în sensul că x este primul element, iar y este al doilea element și se notează cu (x, y) .

În perechea (x, y) , x se mai numește *prima componentă*, iar y a doua componentă.

Două perechi (x, y) și (x', y') sînt egale dacă și numai dacă $x = x'$ și $y = y'$.

Rezultă că $(x, y) \neq (y, x)$, egalitatea avînd loc numai pentru $x = y$. De aici rezultă că noțiunea de pereche ordonată este diferită de cea de mulțime formată din două elemente.

Exemple. 1) Cu numerele 1 și 2 putem forma două perechi ordonate: $(1, 2)$ și $(2, 1)$ care sînt distincte. În plus perechile $(1, 2)$ și $(2, 1)$ sînt diferite de mulțimea $\{1, 2\}$;

2) Cu numerele 1 și 1 putem forma cuplul $(1, 1)$.

Definiție. Fie A și B două mulțimi. Mulțimea ale cărei elemente sînt toate perechile ordonate (a, b) , în care $a \in A$ și $b \in B$ se numește *produsul cartezian* al mulțimilor A și B (în această ordine) și se notează $A \times B$.

Deci: $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ și } b \in B\}$.

Cînd $A = B$, se notează $A \times A = A^2$.

Exemplu. Fie $A = \{1, 4, 5\}$ și $B = \{1, 2, 3\}$.

Atunci $A \times B = \{(1,1), (1,2), (1,3), (4,1), (4,2), (4,3), (5,1), (5,2), (5,3)\}$ și $B \times A = \{(1,1), (1,4), (1,5), (2,1), (2,4), (2,5), (3,1), (3,4), (3,5)\}$.

Se observă că $A \times B \neq B \times A$ deoarece, de exemplu, elementul $(1, 2) \in A \times B$ și $(1, 2) \notin B \times A$.

Observații. 1) În exercițiile unde avem de determinat produsul cartezian a două mulțimi este bine să reținem faptul că dacă A este o mulțime finită cu m elemente, iar B este o mulțime finită cu n elemente, atunci $A \times B$ are $m \cdot n$ elemente. Într-adevăr, cu fiecare element $a \in A$ putem construi n perechi ordonate de forma (a, y) , cu $y \in B$. Cum B are m elemente, numărul total de perechi ordonate este $m \cdot n$.

2) Fie A și B submulțimi ale mulțimii numerelor reale \mathbb{R} . Mulțimea $A \times B$ se poate reprezenta grafic printr-o mulțime de puncte din plan, în care s-a fixat un sistem de axe rectangulare xOy , asociind fiecărui element $(x, y) \in A \times B$, punctul $P(x, y)$ de coordonate x și y .

De exemplu: 1° Dacă $A = [1, 2]$ și $B = [2, 4]$, atunci $A \times B$ are ca reprezentare în plan dreptunghiul hașurat $ABCD$ (fig. 11.5) unde $A(1, 2)$, $B(1, 4)$, $C(2, 4)$ și $D(2, 2)$.

2° Dacă $A = B = \mathbb{R}$, atunci $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ are ca reprezentare tot planul.

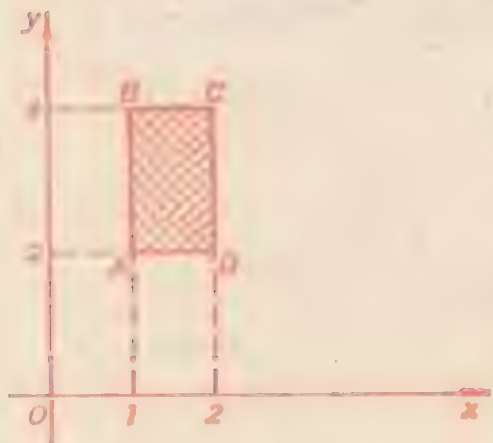


Fig. 11.5

6. Proprietăți ale operațiilor cu mulțimi (Exerciții)

1°. Dacă A, B, C sînt trei mulțimi, atunci $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$ și $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$ (asociativitatea reuniunii și a intersecției).

2° Dacă A, B sînt mulțimi, atunci $A \cup B = B \cup A$ și $A \cap B = B \cap A$ (comutativitatea reuniunii și intersecției).

3° Dacă A este o mulțime, atunci $A \cup A = A$ și $A \cap A = A$ (idempotența reuniunii și intersecției).

4° Oricare ar fi mulțimea A , $A \cup \emptyset = A$ și $A \cap \emptyset = \emptyset$.

5° Dacă A, B, C sînt trei mulțimi, atunci $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (distributivitatea reuniunii față de intersecție) și $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (distributivitatea intersecției față de reuniune).

6° Dacă A, B sînt submulțimi ale lui E , atunci $C_E(A \cup B) = C_E A \cap C_E B$ și $C_E(A \cap B) = C_E A \cup C_E B$ (formulele lui de Morgan).

7° Dacă A este o submulțime a lui E , atunci $C_E(C_E A) = A$.

8° Dacă A, B sînt două mulțimi, atunci $A - B = C_A(A \cap B)$.

9° Dacă A, B, C sînt trei mulțimi, atunci

- i) $A - (B \cup C) = (A - B) - C$; ii) $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$;
iii) $(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C)$; iv) $(A \cap B) - C = A \cap (B - C) = (A - C) \cap B$.

10° Dacă A, B, C sînt trei mulțimi, atunci

- i) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$; ii) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$;
iii) $A \times (B - C) = A \times B - A \times C$.

Vom demonstra, ca model, distributivitatea reuniunii față de intersecție, adică $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Fie $x \in A \cup (B \cap C)$. Avem:

$x \in A \cup (B \cap C) \Rightarrow x \in A$ sau $x \in B \cap C \Rightarrow x \in A$ sau $(x \in B$ și $x \in C) \Rightarrow \Rightarrow (x \in A$ sau $x \in B)$ și $(x \in A$ sau $x \in C) \Rightarrow x \in A \cup B$ și $x \in A \cup C \Rightarrow \Rightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Deci $A \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Fie $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Avem:

$x \in (A \cup B) \cap (A \cup C) \Rightarrow x \in A \cup B$ și $x \in A \cup C \Rightarrow (x \in A$ sau $x \in B)$ și $(x \in A$ sau $x \in C) \Rightarrow x \in A$ sau $(x \in B$ și $x \in C) \Rightarrow x \in A$ sau $x \in B \cap C \Rightarrow \Rightarrow x \in A \cup (B \cap C)$. Deci $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subset A \cup (B \cap C)$. Din cele două incluziuni rezultă că $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Observație. Ca exercițiu, să formalizăm în termeni logici cîteva din definițiile din acest paragraf. De exemplu:

1) relația de incluziune, $A \subset B$, se scrie:

$$A \subset B \Leftrightarrow (\forall x) (x \in A \Rightarrow x \in B);$$

2) relația $A \not\subset B$ se scrie:

$$A \not\subset B \Leftrightarrow (\exists x) ((x \in A) \wedge (x \notin B)).$$

Folosind legile de negație din calculul cu predicate, se poate verifica ușor că propoziția $(\exists x) ((x \in A) \wedge (x \notin B))$ este echivalentă cu propoziția $\neg((\forall x) (x \in A \Rightarrow x \in B))$,

3) definiția reuniunii $A \cup B$, se scrie

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow (x \in A) \vee (x \in B);$$

4) definiția intersecției $A \cap B$, se scrie

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \in B);$$

5) definiția complementarei $C_E A$, se scrie

$$x \in C_E A \Leftrightarrow (x \in E) \wedge (x \notin A);$$

6) definiția diferenței $A - B$, se scrie

$$x \in A - B \Leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \notin B).$$

Propunem cititorului să formalizeze și alte definiții întâlnite.

EXERCITII

1) Să se verifice egalitățile:

a) $\{x \in \mathbb{N} \mid x^2 - 4x + 3 = 0\} = \{1, 3\};$

b) $\{x \in \mathbb{N} \mid x^2 + x - 2 = 0\} = \{1\};$

- c) $\{x \in \mathbf{Z} \mid 2x^2 - 3x + 1 = 0\} = \{1\}$;
- d) $\{x \in \mathbf{Q} \mid 2x^2 - 3x + 1 = 0\} = \left\{\frac{1}{2}, 1\right\}$;
- e) $\{x \in \mathbf{Z} \mid |x - 1| = 2\} = \{-1, 3\}$.
2. Să se determine mulțimea:
 $\{x \in \mathbf{Z} \mid mx^2 - (m^2 + 1)x + m = 0\}$. Discuție.
3. Să se arate că oricare din condițiile: $A \subset B$, $A \cap B = A$ și $A \cup B = B$, pentru submulțimile A și B ale mulțimii X , implică celelalte două.
4. Care dintre următoarele propoziții sînt adevărate sau false:
 a) $\{a, b, c\} = \{b, a, c\}$; b) $\{4, 5, 6\} = \{6, 4, 5\}$;
 c) $\{8 + 1, 5\} = \{5, 9\}$; d) $3 \in \{3\}$; e) $3 \notin \{3\}$;
 f) $3 \subset \{3\}$; g) $\{3\} = \{4\}$; h) $\{3\} = \{\{3\}\}$;
 i) $\emptyset \subset \{1\}$; j) $\emptyset \in \{1\}$.
5. Să se descrie mulțimile:
 $\mathfrak{A}(\mathfrak{A}(\{1\}))$ și $\mathfrak{A}(\mathfrak{A}(\mathfrak{A}(\{1\})))$.
6. Să se determine mulțimile
 a) $A = \left\{x \in \mathbf{N} \mid x = \frac{4n}{n+2}, n \in \mathbf{N}\right\}$;
 b) $B = \left\{x \in \mathbf{Z} \mid x = \frac{6n+7}{3n+1}, n \in \mathbf{Z}\right\}$;
 c) $C = \left\{x \in \mathbf{N} \mid x = \frac{2n^2+4n+2}{n^2+1}, n \in \mathbf{N}\right\}$.
7. Fie $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 3, 7, 11\}$. Să se determine mulțimile $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$. Dacă $E = A \cup B$, să se determine $C_E A$ și $C_E B$.
8. Fie $A = \{1, 3, 5, 7\}$, $B = \{3, 7, 9\}$, $C = \{3, 5, 7, 9\}$. Să se arate că $A \cup B = A \cup C$.
9. Dacă A , B , C sînt trei mulțimi astfel încît $A \cup B = A \cup C$ și $A \cap B = A \cap C$, atunci $B = C$.
10. Să se determine m astfel încît:
 $\{x \in \mathbf{R} \mid x^2 - 4x + m = 0\} \cap \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 - 3x + 2 = 0\} \neq \emptyset$.
11. Să se determine m astfel încît:
 $\{x \in \mathbf{R} \mid x^2 - 3x + m = 0\} \cap \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 - 5x + 4 = 0\} = \emptyset$.
12. Să se determine m astfel încît:
 $\{x \in \mathbf{R} \mid x^2 + mx - 1 = 0\} - \left\{-2, \frac{1}{2}\right\} = \emptyset$.
13. Să se arate că mulțimea
 $\{x \in \mathbf{R} \mid x^2 + mx + 1 = 0\} \cup \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 + 4x + m^2 = 0\}$
 are două elemente oricare ar fi $m \in \mathbf{R}$.
14. Să se arate că:
 $\left\{x \in \mathbf{R} \mid x = \frac{a^2 + a + 1}{a + 1}, a \in \mathbf{R}\right\} = (-\infty, -3] \cup [1, +\infty)$.
15. Fie $A = \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 + mx + m^2 + 1 = 0\}$. Să se calculeze $C_{\mathbf{R}} A$.
16. Determinați toate submulțimile următoarelor mulțimi:
 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b, c, d\}$, $C = \{x, y, z, u, v\}$.
17. Fie a un număr natural. Vom nota cu $D(a)$ mulțimea
 $D(a) = \{x \in \mathbf{N} \mid x \text{ divide } a\}$.
 i) Dovediți că $D(a)$ are cel puțin două elemente ($a > 1$).
 ii) Pentru care numere naturale a , $D(a)$ are exact două elemente.
 iii) Pentru care numere naturale a , $D(a)$ are exact patru elemente.
 iv) Determinați mulțimile: $D(8)$, $D(160)$, $D(120)$.

18. Să se determine m astfel încît mulțimea

$$A = \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 - mx + 2 = 0\} \cup \{x \in \mathbf{R} \mid 2x^2 - mx + 1 = 0\}$$

să conțină 3 elemente. Poate avea, A , 2 elemente?

19. Fie $r_1 < r_2 < \dots < r_n < \dots$ numere naturale. Fie, de asemenea, a un număr natural. Pentru orice număr natural k notăm:

$$A_k = \{a + r_k m \mid m = 1, 2, \dots\}.$$

Dovediți că nu există nici un element comun tuturor mulțimilor $A_k (k \geq 1)$.

20. Fie A, B două mulțimi. Notăm cu $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$ (Mulțimea $A \Delta B$ se numește *diferența simetrică* a mulțimilor A și B). Dovediți că: a) Pentru orice trei mulțimi A, B, C are loc egalitatea $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$; b) $A \Delta \emptyset = \emptyset \Delta A = A$; c) $A \Delta B = B \Delta A$; d) $A \Delta A = \emptyset$.

21. Fie a_0 un număr natural. Definim mulțimea

$$A = \{a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\} \text{ unde } a_1 = \sqrt{a_0^2 + 1}, \dots, a_{n+1} = \sqrt{a_n^2 + 1}, \dots$$

Arătați că mulțimea $A - \mathbf{Q} \neq \emptyset$.

22. Dacă M este o mulțime finită, vom nota prin $n(M)$ numărul elementelor sale. Fie A, B, C trei mulțimi. Dovediți că:

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - [n(A \cap B) + n(A \cap C) + n(B \cap C)] + n(A \cap B \cap C).$$

23. Fie A_1, A_2, \dots, A_n , n mulțimi ($n \geq 2$). Dovediți că pentru oricare două numere naturale i, j ($1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$), avem:

$$(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_i) \cap (A_{i+1} \cap \dots \cap A_n) = (A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_j) \cap (A_{j+1} \cap \dots \cap A_n) = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$$

și $(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_i) \cup (A_{i+1} \cup \dots \cup A_n) = (A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_j) \cup (A_{j+1} \cup \dots \cup A_n)$.

De asemenea, dacă i_1, i_2, \dots, i_n sînt numerele $1, 2, \dots, n$ scrise într-o altă ordine, atunci

$$A_1 \cup \dots \cup A_n = A_{i_1} \cup \dots \cup A_{i_n},$$

$$A_1 \cap \dots \cap A_n = A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_n}.$$

24. Fie $A = \{1, 2, 3\}$ și $B = \{1, 3, 4\}$. Să se determine mulțimile

$A \times A, A \times B, B \times A, B \times B$ și apoi să se reprezinte grafic într-un plan de coordonate xOy .

25. Fie mulțimea $A = [1, 2] \cup [3, 4]$. Să se determine $A \times A$ și apoi să se reprezinte grafic într-un plan de coordonate xOy .

26. Fie mulțimea $B = [1, 2] \cup [3, 4]$. Să se determine mulțimea $B \times B$ și apoi să se reprezinte grafic într-un plan de coordonate xOy .

§ 3. FUNCȚII

Cuvîntul „funcție” este adesea utilizat în vorbirea curentă. Se spune, de exemplu, că recoltatul grîului se face în funcție de starea vremii. Se spune, de asemenea, că nota pe care o obține un elev, atunci cînd este ascultat, este în funcție de răspunsurile pe care le dă. Ca și în viața de toate zilele, conceptul de funcție joacă un rol imens în toată matematica și chiar în toată știința. În continuare ne vom ocupa de studiul conceptului matematic de funcție.

3.1. Noțiunea de funcție

Definiție. Fie A și B două mulțimi. Prin *funcție definită pe mulțimea A , cu valori în mulțimea B* se înțelege orice lege (procedeu sau convenție etc.) f , în baza căreia oricărui element $a \in A$ i se asociază un unic element, notat $f(a)$, din B .

Definiția funcției presupune de fapt existența a *trei elemente*:

1° O mulțime A , pe care este definită funcția și care se numește *domeniul de definiție al funcției*.

2° O a doua mulțime B , în care ia valori funcția și care se numește *domeniul valorilor funcției sau codomeniul funcției*.

3° O lege (procedeu, convenție etc.) f .

Pentru a simboliza faptul că aceste trei elemente A , B , f sînt elementele constituante ale unei funcții definită pe mulțimea A cu valori în mulțimea B se scrie simplu:

$$f : A \rightarrow B \text{ sau } A \xrightarrow{f} B$$

și se citește „ f definită pe A cu valori în B “.

Dacă $a \in A$, atunci elementul $f(a) \in B$ se numește *imagea* lui a prin funcția respectivă, sau *valoarea* lui f în a .

O funcție $f : A \rightarrow B$ se mai numește și *aplicație* de la A la B .

Observații. 1) Deși în definiția unei funcții $A \xrightarrow{f} B$ apar în mod necesar trei elemente, totuși, uneori pentru simplificarea limbajului, se spune că „ f este o funcție“, urmînd ca celelalte două elemente să rezulte din context.

2) Dacă A și B sînt două mulțimi oarecare, atunci, în general, există mai multe funcții definite pe A cu valori în B .

3) Două funcții $f : A \rightarrow B$ și $g : A' \rightarrow B'$ se numesc *egale* dacă $A = A'$, $B = B'$ și în plus, pentru orice element $a \in A$, avem $f(a) = g(a)$. Dacă există cel puțin un element $a \in A$ pentru care $f(a) \neq g(a)$, atunci funcțiile f și g nu sînt egale. Cînd funcțiile f și g sînt egale notăm $f = g$; în cazul cînd nu sînt egale notăm $f \neq g$.

4) Fie $f : A \rightarrow B$ o funcție. Dacă x desemnează un element oarecare din A , iar y desemnează elementul $f(x)$, atunci vom scrie: $y = f(x)$. Această egalitate poartă numele de *dependență funcțională* asociată funcției f , iar x se numește *variabilă* sau *argument*. Ori de cîte ori ne este clar cine este domeniul și codomeniul funcției f , putem să indicăm pentru această funcție numai dependența funcțională $y = f(x)$.

Exemple. 1) Fie mulțimile $A = \{a, b, c, d\}$ și $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Definim funcția $f : A \rightarrow B$ după „legea“: lui a i se asociază 1; lui b i se asociază 2; lui c i se asociază 2; lui d i se asociază 5. Pentru această funcție avem: $f(a) = 1$; $f(b) = 2$; $f(c) = 2$ și $f(d) = 5$.

De asemenea, de la A la B putem defini funcția $g : A \rightarrow B$ după legea: oricărui element x din A i se asociază numărul 1.

Pentru funcția g avem: $g(a) = g(b) = g(c) = g(d) = 1$.

Se vede că funcțiile f și g nu sînt egale.

2) Fie A mulțimea tuturor țărilor de pe glob, iar B mulțimea tuturor orașelor de pe glob.

Definim funcția $f : A \rightarrow B$ după legea: unei țări i se asociază capitala sa.

Pentru această funcție avem de exemplu: $f(\text{România}) = \text{București}$, $f(\text{Italia}) = \text{Roma}$ etc.

3) Fie \mathbf{Z} mulțimea numerelor întregi. Definim funcția $f : \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}$ după legea: lui $a \in \mathbf{Z}$ i se asociază pătratul său, adică $f(a) = a^2$.

3.2. Moduri de a defini o funcție

Cînd definim o funcție trebuie să precizăm cele trei elemente ce o caracterizează: domeniul de definiție, domeniul valorilor și legea de asociere. Vom distinge două moduri de a defini o funcție.

a) *Funcții definite sintetic.* În multe cazuri o funcție $f : A \rightarrow B$ poate fi definită, numind pentru fiecare element în parte din A elementul ce i se asociază din mulțimea B .

Exemplu. Fie $A = \{1, 2, 3, 4\}$ și $B = \{1, 7, 9\}$.

Definim $f : A \rightarrow B$ punind: $f(1) = 1$; $f(2) = 7$; $f(3) = 1$ și $f(4) = 9$.

Legea de asociere a funcției $f : A \rightarrow B$ poate fi reprezentată grafic printr-o diagramă (fig. II.6) sau printr-un tabel (fig. II.7). (În figura II.6 săgețile indică legea de definire a funcției de la mulțimea A la B . În tabelul din figura II.7 în prima linie sînt trecute elementele mulțimii pe care este definită funcția, iar în linia a doua elementele din mulțime unde funcția ia valori).

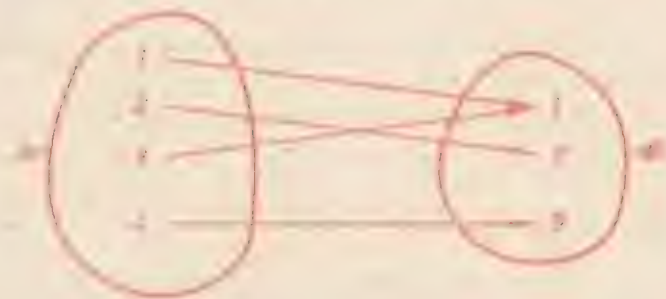


Fig. II.6

x	1	2	3	4
$f(x)$	1	7	1	9

Fig. II.7

Pentru orice funcție definită sintetic se poate asocia o diagramă ca în figura II.6 sau un tabel (numit *tabelul de valori al funcției*), ca în figura II.7.

De multe ori este preferabil și sugestiv să indicăm diagrama sau tabelul de valori pentru a defini funcția respectivă.

De exemplu, să considerăm diagrama din figura II.8.

Funcția asociată este: $f : A \rightarrow B$ unde $f(a) = -1$; $f(b) = -1$; $f(c) = 2$ și $f(d) = 4$.

Sau să considerăm tabelul din figura II.9.

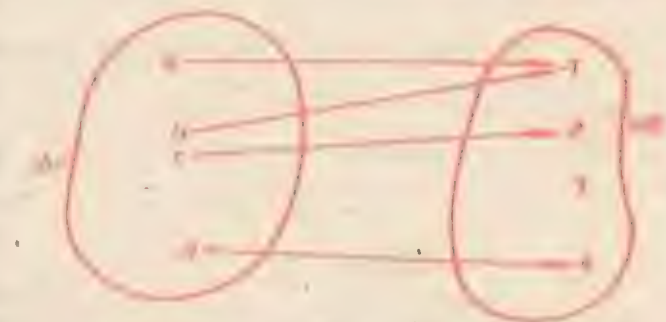


Fig. II.8

x	a	b	c	d
$f(x)$	1	7	10	13

Fig. II.9

Funcția asociată este $f : \{a, b, c, d\} \rightarrow \{1, 7, 10, 13\}$, unde $f(a) = 1$; $f(b) = 7$; $f(c) = 10$ și $f(d) = 13$.

b) *Funcții definite analitic.* O funcție $f : A \rightarrow B$ poate fi definită specificînd o proprietate (sau relațiile) ce leagă un element arbitrar $a \in A$ de elementul $f(a)$ din B .

Exemple. 1) Fie A mulțimea tuturor oamenilor din România, iar N mulțimea numerelor naturale.

Definim funcția: $f : A \rightarrow N$ astfel:

$f(x)$ este egală cu vîrsta (în ani) a lui x în momentul de față.

2) Fie B mulțimea orașelor din România iar C mulțimea județelor țării. Definim funcția $f : B \rightarrow C$ astfel:

$f(x) =$ județul căruia îi aparține orașul x .

3) Dându-se o formulă (sau expresie algebrică) $E(x)$, putem să-i asociem o funcție sau mai multe funcții. (Întotdeauna aceste funcții vor avea domeniul și codomeniul, submulțimi ale mulțimii numerelor reale.)

De exemplu, considerăm expresia $E(x) = x^2 + 1$. Putem defini funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât $f(x) = x^2 + 1$.

Aceleiași expresii $E(x) = x^2 + 1$ putem să-i asociem și funcția $g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$; $g(x) = x^2 + 1$.

Este evident că funcțiile f și g sînt diferite deoarece domeniul de definiție al lui f este \mathbb{R} , iar al lui g este \mathbb{Z} .

Reținem faptul că unei expresii sau formule i se pot asocia mai multe funcții.

De asemenea, cînd definim o funcție cu ajutorul unei expresii algebrice trebuie să avem în vedere dacă acea expresie are sens pentru elementele din domeniul de definiție.

De exemplu, să considerăm expresia:

$$E(x) = \frac{x+1}{x-1}.$$

Acestei expresii nu-i putem asocia o funcție $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = \frac{x+1}{x-1}$, deoarece expresia $E(x)$ nu are sens pentru $x = 1$.

4) Dându-se mai multe expresii algebrice putem să definim o funcție sau mai multe funcții.

Să considerăm expresiile:

$$E_1(x) = x + 2, E_2(x) = x^2 \text{ și } E_3(x) = \frac{1}{x}.$$

Definim funcția:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ astfel } f(x) = \begin{cases} x + 2, & \text{dacă } x < 0, \\ x^2, & \text{dacă } 0 \leq x \leq 1, \\ \frac{1}{x}, & \text{dacă } x > 1. \end{cases}$$

Acelorași expresii putem să le asociem și funcția $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dată în felul următor:

$$g(x) = \begin{cases} x + 2, & \text{dacă } x < -1, \\ x^2, & \text{dacă } -1 \leq x \leq 2, \\ \frac{1}{x}, & \text{dacă } x > 2. \end{cases}$$

Se observă imediat că avem $f(2) = \frac{1}{2}$, iar $g(2) = 4$, deci f și g sînt funcții distincte.

Într-un mod asemănător putem defini o funcție prin patru, cinci sau chiar un număr mai mare de formule.

2) Fie B mulțimea orașelor din România iar C mulțimea județelor țării. Definim funcția $f : B \rightarrow C$ astfel:

$f(x) =$ județul căruia îi aparține orașul x .

3) Dându-se o formulă (sau expresie algebrică) $E(x)$, putem să-i asociem o funcție sau mai multe funcții. (Întotdeauna aceste funcții vor avea domeniul și codomeniul, submulțimi ale mulțimii numerelor reale.)

De exemplu, considerăm expresia $E(x) = x^2 + 1$. Putem defini funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât $f(x) = x^2 + 1$.

Aceleiași expresii $E(x) = x^2 + 1$ putem să-i asociem și funcția $g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$; $g(x) = x^2 + 1$.

Este evident că funcțiile f și g sînt diferite deoarece domeniul de definiție al lui f este \mathbb{R} , iar al lui g este \mathbb{Z} .

Reținem faptul că unei expresii sau formule i se pot asocia mai multe funcții.

De asemenea, cînd definim o funcție cu ajutorul unei expresii algebrice trebuie să avem în vedere dacă acea expresie are sens pentru elementele din domeniul de definiție.

De exemplu, să considerăm expresia:

$$E(x) = \frac{x+1}{x-1}.$$

Acestei expresii nu-i putem asocia o funcție $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = \frac{x+1}{x-1}$, deoarece expresia $E(x)$ nu are sens pentru $x = 1$.

4) Dându-se mai multe expresii algebrice putem să definim o funcție sau mai multe funcții.

Să considerăm expresiile:

$$E_1(x) = x + 2, E_2(x) = x^2 \text{ și } E_3(x) = \frac{1}{x}.$$

Definim funcția:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ astfel } f(x) = \begin{cases} x + 2, & \text{dacă } x < 0, \\ x^2, & \text{dacă } 0 \leq x \leq 1, \\ \frac{1}{x}, & \text{dacă } x > 1. \end{cases}$$

Acelorași expresii putem să le asociem și funcția $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dată în felul următor:

$$g(x) = \begin{cases} x + 2, & \text{dacă } x < -1, \\ x^2, & \text{dacă } -1 \leq x \leq 2, \\ \frac{1}{x}, & \text{dacă } x > 2. \end{cases}$$

Se observă imediat că avem $f(2) = \frac{1}{2}$, iar $g(2) = 4$, deci f și g sînt funcții distincte.

Într-un mod asemănător putem defini o funcție prin patru, cinci sau chiar un număr mai mare de formule.

Exemple. 1) Fie funcția $f : \left\{ -1, 0, \frac{1}{2}, 3 \right\} \rightarrow \{ -\sqrt{2}, 1, 2 \}$ asociată tabelului

x	-1	0	$\frac{1}{2}$	3
$f(x)$	$-\sqrt{2}$	1	2	$-\sqrt{2}$

Graficul funcției f este: $G_f = \left\{ (-1, -\sqrt{2}), (0, 1), \left(\frac{1}{2}, 2\right), (3, -\sqrt{2}) \right\}$.

Reprezentarea geometrică a mulțimii G_f este mulțimea punctelor P_1, P_2, P_3, P_4 (fig. II.11).



Fig. II.11



Fig. II.12

2) Fie funcția de gradul întâi $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = mx + n$ unde $m, n \in \mathbb{R}$ și $m \neq 0$. Graficul acestei funcții este mulțimea

$$G_f = \{(a, f(a)) \mid a \in \mathbb{R}\} = \{(a, ma + n) \mid a \in \mathbb{R}\}.$$

Reprezentarea geometrică a graficului funcției de gradul întâi $f(x) = mx + n, m \neq 0$, este o dreaptă care taie axele în punctele $P_1(0, n)$ și $P_2\left(-\frac{n}{m}, 0\right)$ (fig. II.12).



Fig. II.13

3) Fie funcția *modul* $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |x|$ unde

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{dacă } x > 0, \\ 0, & \text{dacă } x = 0, \\ -x, & \text{dacă } x < 0. \end{cases}$$

Graficul acestei funcții este constituit din două semidrepte d și d' (fig. II.13) unde d este bisectoarea unghiului xOy , iar d' este bisectoarea unghiului $x'Oy$.

Observație. Când avem o funcție numerică, o problemă care se pune este de a trasa graficul acestei funcții, adică de a vedea ce figură geometrică reprezintă acest grafic în plan. Acest lucru va fi făcut pentru fiecare caz în parte.

3.5. Funcții injective, surjective, bijective

Definiție. Fie $f: A \rightarrow B$ o funcție. Vom spune că f este o funcție *injectivă* sau că este o *injecție*, dacă pentru oricare două elemente x și y ale lui A , $x \neq y$, avem $f(x) \neq f(y)$.

Faptul că funcția f este injectivă se mai exprimă și astfel: dacă x și y sînt elemente oarecare din A cu proprietatea $f(x) = f(y)$, atunci rezultă $x = y$.

Din definiție rezultă că o funcție $f: A \rightarrow B$ nu este injectivă dacă există cel puțin două elemente x și y din A , $x \neq y$, astfel încît $f(x) = f(y)$.

Exemple de funcții injective

- 1) Funcția $f: A \rightarrow B$, asociată diagramei din figura II.14 este o funcție injectivă.
- 2) Funcția $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, definită prin formula $g(x) = x^2$, este injectivă. Într-adevăr să presupunem că $g(x) = g(y)$ unde $x, y \in \mathbb{N}$. Atunci $x^2 = y^2$ de unde $(x - y)(x + y) = 0$.

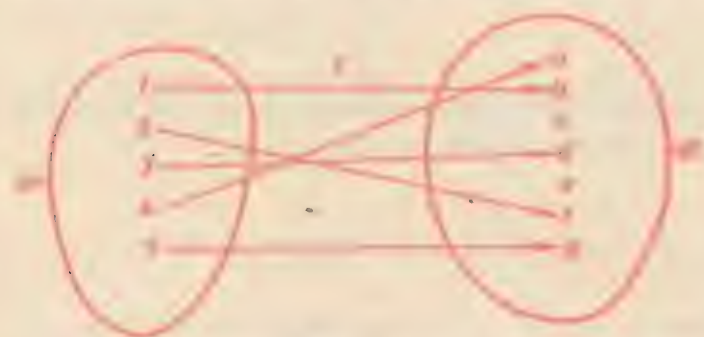


Fig. II.14



Fig. II.15

Din această egalitate rezultă că $x - y = 0$ sau $x + y = 0$. Din prima egalitate avem că $x = y$. Dacă are loc egalitatea $x + y = 0$, cum x și y sînt numere naturale, obținem că $x = y = 0$. Oricum, din egalitatea $g(x) = g(y)$ rezultă că $x = y$ și deci g este o funcție injectivă.

3) Funcția $h: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$, $h(x) = x^2$ nu este o funcție injectivă deoarece $h(-2) = h(2) = 4$.

4) Funcția $k: A \rightarrow B$ asociată diagramei din figura II.15 nu este injectivă, deoarece $k(1) = k(4) = c$.

Definiție. O funcție $f: A \rightarrow B$ este o funcție *surjectivă* sau, simplu, este o *surjecție* dacă pentru orice element $b \in B$ există cel puțin un element $a \in A$, astfel încît $f(a) = b$.

Rezultă că o funcție $f: A \rightarrow B$ nu este surjectivă dacă există cel puțin un element $b \in B$, astfel încît pentru orice element $x \in A$ avem $f(x) \neq b$.

Exemple de funcții surjective

1) Funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin relația $f(x) = ax$, $a \neq 0$, este surjectivă. Într-adevăr, fie $y \in \mathbb{R}$. Atunci $x = \frac{y}{a} \in \mathbb{R}$ și avem $f\left(\frac{y}{a}\right) = a \cdot \frac{y}{a} = y$.

2) Funcția $g: A \rightarrow B$ asociată diagramei din figura II.16 este de asemenea surjectivă.

$g(1) = a$, $g(2) = g(3) = b$, $g(4) = c$, $g(5) = a$.



Fig. II.16

3) Funcția $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin formula $h(x) = x^2$ nu este surjectivă. Într-adevăr pentru orice $x \in \mathbb{R}$ avem $h(x) = x^2 \neq -1$. Deci -1 nu este imaginea nici unui element, prin h , din domeniul de definiție.

4) Funcția $k : A \rightarrow B$ asociată diagramei din figura II.17 nu este surjectivă. Într-adevăr se vede că elementul $2 \in B$ nu este imaginea prin k a nici unui element din A .

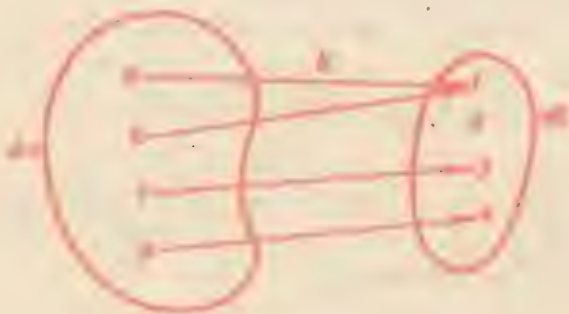


Fig. II.17



Fig. II.18

Definiție. O funcție $f : A \rightarrow B$ care este simultan injectivă și surjectivă se numește *funcție bijectivă* sau, simplu, *bijecție*.

Exemple de funcții bijective

1) Funcția $f : A \rightarrow B$ asociată diagramei din figura II.18 este bijectivă:
 $f(1) = b$, $f(2) = c$, $f(3) = a$, $f(4) = d$.

2) Fie $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$. Definim funcția $g : A \rightarrow A$ prin formula: $g(x) = x^2$. Funcția g este bijectivă. Într-adevăr, trebuie să arătăm că g este injectivă și surjectivă.

Funcția g este injectivă. Fie $x, y \in A$ astfel încât $g(x) = g(y)$. Atunci $x^2 = y^2$, de unde $(x - y)(x + y) = 0$ și deci $x - y = 0$ sau $x + y = 0$. Dacă $x - y = 0$, avem $x = y$; dacă $x + y = 0$, avem $x = -y$ și cum x, y sînt numere reale ≥ 0 trebuie ca $x = y = 0$. Oricum, din egalitatea $g(x) = g(y)$ rezultă $x = y$.

Funcția g este surjectivă. Fie $y \in A$. Cum $y \geq 0$, atunci are sens \sqrt{y} . Cum $\sqrt{y} \geq 0$, atunci $\sqrt{y} \in A$. Se vede că $g(\sqrt{y}) = (\sqrt{y})^2 = y$ și deci g este surjectivă.

3) Funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, unde $a, b \in \mathbb{R}$ și $a \neq 0$ este bijectivă.

Într-adevăr, dacă $f(x_1) = f(x_2)$, atunci $ax_1 + b = ax_2 + b$, de unde obținem $ax_1 = ax_2$. Cum $a \neq 0$, atunci $x_1 = x_2$. Deci f este injectivă. Să arătăm că f este și surjectivă. Fie $y \in \mathbb{R}$. Are sens numărul real $x = \frac{y}{a} - \frac{b}{a}$. Atunci $f(x) = a\left(\frac{y}{a} - \frac{b}{a}\right) + b = y$, ceea ce arată că f este și surjectivă.

3.6. Compunerea funcțiilor

Fie funcțiile $f : A \rightarrow B$ și $g : B \rightarrow C$. Observăm, că domeniul de definiție al funcției g coincide cu codomeniul funcției f . Această situație particulară ne permite să facem următoarele considerații. Fie $a \in A$; atunci elementul $f(a)$ găsindu-se în B putem vorbi de imaginea sa prin g , adică de elementul $g(f(a))$ din C . Observăm că astfel putem asocia oricărui element $a \in A$ un element unic din mulțimea C , anume elementul $g(f(a))$. În felul acesta am definit o funcție h al cărei domeniu de definiție este cel al funcției f , iar codomeniul este cel al funcției g . Deci $h : A \rightarrow C$ unde $h(a) = g(f(a))$ pentru

orice $a \in A$. De obicei funcția h astfel definită se notează $g \circ f$ (sau gf) și se numește **compunerea funcției g cu funcția f** . (În figura II.19 este reprezentat modul de definire al funcției $g \circ f$.)

Exemple. 1) Considerăm funcțiile $f: A \rightarrow B$ și $g: B \rightarrow C$ definite respectiv prin diagramele din figura II.20.

În acest caz avem $(g \circ f)(1) = g(f(1)) = g(3) = t$; $(g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(6) = t$; $(g \circ f)(3) = g(f(3)) = g(1) = q$; $(g \circ f)(4) = g(f(4)) = g(4) = m$.

Funcția $g \circ f: A \rightarrow C$ poate fi reprezentată prin diagrama din figura II.21.

2) Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funcțiile definite respectiv prin formulele:

$$f(x) = x^2 - 1; \quad g(x) = 1 + x^2.$$

Funcția $g \circ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ are sens. Pentru orice $x \in \mathbb{R}$ avem:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2 - 1) = 1 + (x^2 - 1)^2 = x^4 - 2x^2 + 2.$$



Fig. II.20



Fig. II.21

Deci funcția compusă $g \circ f$ este dată de formula:

$$(g \circ f)(x) = x^4 - 2x^2 + 2.$$

Se observă că are sens să vorbim și de compunerea lui f cu g . Pentru orice $x \in \mathbb{R}$ avem

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(1 + x^2) = (1 + x^2)^2 - 1 = x^4 + 2x^2.$$

Deci funcția $f \circ g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este dată de formula:

$$(f \circ g)(x) = x^4 + 2x^2.$$

Observații. 1) Dacă $f: A \rightarrow B$ și $g: C \rightarrow D$ sînt două funcții, are sens să vorbim de compunerea funcției g cu funcția f numai atunci cînd $B = C$.

2) Dacă $f: A \rightarrow B$ și $g: B \rightarrow A$ sînt două funcții are sens $g \circ f: A \rightarrow A$ și $f \circ g: B \rightarrow B$. Așa cum rezultă și din exemplul 2) în general $g \circ f \neq f \circ g$, adică compunerea, nu este **comutativă**.

Teoremă. Fie $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow C$ și $h: C \rightarrow D$ trei funcții. Atunci fiecare din funcțiile $h \circ (g \circ f)$, $(h \circ g) \circ f$ are sens și există egalitatea: $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

Demonstrație. Codomeniul funcției $g \circ f$ este mulțimea C . Cum domeniul de definiție a lui h este tot C , atunci are sens compunerea $h \circ (g \circ f)$. Analog, domeniul de definiție al funcției $h \circ g$ este B , iar codomeniul lui f fiind tot B

are sens compunerea $(h \circ g) \circ f$. Funcțiile $h \circ (g \circ f)$ și $(h \circ g) \circ f$ au același domeniu de definiție (mulțimea A) și același codomeniu (mulțimea D).

Pentru a arăta egalitatea $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ rămâne să dovedim că pentru orice $x \in A$ avem $(h \circ (g \circ f))(x) = ((h \circ g) \circ f)(x)$.

Intr-adevăr $(h \circ (g \circ f))(x) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x)))$, iar $((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x)))$.

Comparând, obținem egalitatea cerută.

Observație. Proprietatea demonstrată în teorema de mai sus se numește *asociativitatea compunerii funcțiilor*.

Această proprietate ne permite să folosim scrierea

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f = h \circ g \circ f.$$

3.7. Funcția Inversă

Fie A o mulțime oarecare. Vom nota cu $1_A : A \rightarrow A$ funcția definită astfel: $1_A(a) = a$ pentru orice $a \in A$. 1_A se numește *funcția identică a mulțimii A* .

Propoziție. Fie A o mulțime și 1_A funcția sa identică. Atunci:

1° Pentru orice mulțime B și pentru orice funcție

$$f : A \rightarrow B, \text{ avem } f \circ 1_A = f.$$

2° Pentru orice mulțime C și pentru orice funcție

$$g : C \rightarrow A, \text{ avem } 1_A \circ g = g.$$

Demonstrație. Demonstrăm afirmația 1°. Funcțiile f și $f \circ 1_A$ au același domeniu și codomeniu așa că pentru a arăta egalitatea $f \circ 1_A = f$ rămâne să dovedim că pentru orice $a \in A$, $(f \circ 1_A)(a) = f(a)$.

Intr-adevăr $(f \circ 1_A)(a) = f(1_A(a)) = f(a)$.

Demonstrăm afirmația 2°. Funcțiile $1_A \circ g$ și g au același domeniu și codomeniu, adică mulțimile C respectiv A .

Pentru a arăta egalitatea $1_A \circ g = g$ rămâne să dovedim că pentru orice $c \in C$ avem $(1_A \circ g)(c) = g(c)$.

Intr-adevăr $(1_A \circ g)(c) = 1_A(g(c)) = g(c)$.

Definiție. O funcție $f : A \rightarrow B$ se numește *inversabilă* dacă există o funcție $g : B \rightarrow A$ astfel încât

$$g \circ f = 1_A \text{ și } f \circ g = 1_B. \quad (1)$$

Observăm că funcția g definită de relațiile (1) este unică. Intr-adevăr, dacă $g' : B \rightarrow A$ este o altă funcție astfel încât

$$g' \circ f = 1_A \text{ și } f \circ g' = 1_B, \quad (2)$$

atunci obținem:

$$g = 1_A \circ g = (g' \circ f) \circ g = g' \circ (f \circ g) = g' \circ 1_B = g',$$

unde s-au utilizat relațiile (1) și (2) precum și asociativitatea compunerii funcțiilor.

Dacă f este o funcție inversabilă, atunci funcția g definită de relațiile (1), care este unică, se numește *inversa funcției f* și se notează f^{-1} .

Se pune întrebarea, cînd este o funcție inversabilă? Răspunsul este dat de următoarea teoremă.

Teoremă. O funcție $f: A \rightarrow B$ este inversabilă dacă și numai dacă este bijectivă.

Demonstrație. Să presupunem mai întîi că f este inversabilă și să arătăm că f este injectivă și surjectivă. Din faptul că f este inversabilă rezultă că există $f^{-1}: B \rightarrow A$ astfel încît

$$f^{-1} \circ f = 1_A \text{ și } f \circ f^{-1} = 1_B. \quad (3)$$

Fie x_1, x_2 din A și să presupunem că $f(x_1) = f(x_2)$. Din prima dintre relațiile (3) obținem că $x_1 = 1_A(x_1) = (f^{-1} \circ f)(x_1) = f^{-1}(f(x_1)) = f^{-1}(f(x_2)) = (f^{-1} \circ f)(x_2) = 1_A(x_2) = x_2$. Deci f este injectivă. Fie $y \in B$. Din a doua dintre relațiile (3) se obține: $y = 1_B(y) = (f \circ f^{-1})(y) = f(f^{-1}(y))$. Dacă se notează $x = f^{-1}(y)$, atunci $y = f(x)$, ceea ce arată că f este și surjectivă.

Reciproc, presupunem că f este bijectivă. Definim funcția $g: B \rightarrow A$ în modul următor. Fie $y \in B$. Deoarece f este surjectivă există $x \in A$ astfel încît $f(x) = y$. Elementul x este unic determinat cu această proprietate, întrucît f este injectivă și definim $g(y) = x$.

Să dovedim că $g \circ f = 1_A$ și $f \circ g = 1_B$. Fie $x \in A$. Atunci, notînd $y = f(x)$, rezultă din definiția lui g că $g(y) = x$ și deci $g(f(x)) = x$ sau $(g \circ f)(x) = 1_A(x)$. Rezultă atunci $g \circ f = 1_A$. Să arătăm acum că $f \circ g = 1_B$. Fie $y \in B$. Din definiția lui g , $g(y) = x$, unde x este elementul din A pentru care $f(x) = y$. Atunci $(f \circ g)(y) = f(g(y)) = f(x) = y = 1_B(y)$, de unde obținem că $f \circ g = 1_B$.

Observație. Din demonstrația teoremei precedente rezultă că dacă $f: A \rightarrow B$ este o funcție bijectivă, atunci funcția sa inversă $f^{-1}: B \rightarrow A$ se definește după următorul procedeu: dacă $b \in B$, atunci $f^{-1}(b)$ este unicul element $a \in A$, astfel încît $f(a) = b$.

Exemple: 1) Fie funcția $f: A \rightarrow B$ asociată diagramei din figura II.22:

$$f(1) = c, f(2) = a, f(3) = e, f(4) = d, f(5) = b.$$

Se vede că f este o funcție bijectivă. Atunci există funcția inversă $f^{-1}: B \rightarrow A$.

Vom avea: $f^{-1}(a) = 2$; $f^{-1}(b) = 5$; $f^{-1}(c) = 1$; $f^{-1}(d) = 4$; $f^{-1}(e) = 3$. Funcția f^{-1} are diagrama reprezentată în figura II.23.

Se observă că diagrama funcției f^{-1} se obține din aceea a lui f , inversînd sensul săgeților.



Fig. II.22

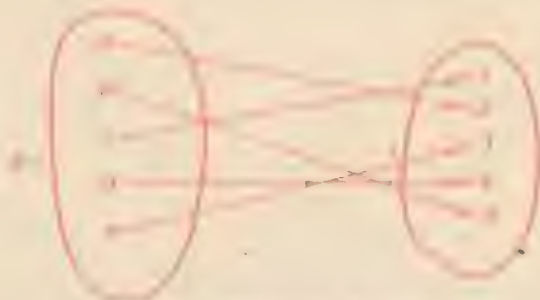


Fig. II.23

2) Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$ unde $a, b \in \mathbb{R}$ și $a \neq 0$. Această funcție este bijectivă, deci putem vorbi de inversa sa. Fie $y \in \mathbb{R}$. Atunci $f^{-1}(y) = x$ unde $f(x) = y$. Deci dat $y \in \mathbb{R}$ trebuie să determinăm $x \in \mathbb{R}$, astfel încât $f(x) = y$ sau $ax + b = y$. Din $ax + b = y$ obținem că $x = \frac{y - b}{a} = \frac{1}{a}y - \frac{b}{a}$. Deci, $f^{-1}(y) = \frac{1}{a}y - \frac{b}{a}$. Folosind notația cu x , atunci funcția inversă a lui f este:

$$f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ unde } f^{-1}(x) = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a}.$$

Interpretarea geometrică a inversei unei funcții numerice



fig. II.24

Fie $f: A \rightarrow B$ o funcție numerică inversabilă și $f^{-1}: B \rightarrow A$ funcția inversă a lui f . Fie $M(x_0, y_0)$ un punct al graficului funcției f (fig. II.24). Atunci $y_0 = f(x_0)$ și deci $x_0 = f^{-1}(y_0)$. Rezultă că punctul $M'(y_0, x_0)$ aparține graficului funcției f^{-1} (reprezentat punctat în figura II.24). Dar M și M' sînt simetrice față de bisectoarea unghiului xOy (numită prima bisectoare)*. Rezultă că graficele funcțiilor f și f^{-1} sînt simetrice față de prima bisectoare.

Observație. Ca exercițiu, să formalizăm în termeni logici cîteva din definițiile date în acest paragraf.

1) Definiția funcției injective, $f: A \rightarrow B$, se scrie:

(f injectivă) $\Leftrightarrow (\forall x) (\forall y) [(x \neq y) \Rightarrow (f(x) \neq f(y))]$, unde literele x, y desemnează elemente din A .

Faptul că f nu este injectivă se formalizează astfel:

(f nu este injectivă) $\Leftrightarrow (\exists x) (\exists y) [(x \neq y) \wedge (f(x) = f(y))]$.

2) Definiția funcției surjective, $f: A \rightarrow B$, se scrie:

(f surjectivă) $\Leftrightarrow (\forall y) (\exists x) [y = f(x)]$,

unde y desemnează un element oarecare din B , iar x desemnează un element oarecare din A .

Faptul că f nu este surjectivă se formalizează astfel:

(f nu este surjectivă) $\Leftrightarrow (\exists y) (\forall x) [y \neq f(x)]$,

unde y desemnează un element din B , iar x desemnează un element oarecare din A .

Propunem cititorului să formalizeze și alte definiții întîlnite.

EXERCITIU

1. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definită astfel

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 4, & \text{dacă } x < -1, \\ -7, & \text{dacă } -1 \leq x < 3, \\ -3x + 2, & \text{dacă } x \geq 3. \end{cases}$$

Să se determine $f(-2)$, $f(-1)$, $f(2)$, $f(4)$.

* Într-adevăr, cum $(OP) \equiv (OQ)$ și $(MP) \equiv (M'Q)$ rezultă că $\triangle OPM \equiv \triangle OQM'$ deci $(OM) \equiv (OM')$. Pe de altă parte $m(\widehat{POM}) = m(\widehat{QOM'})$ și deci $\widehat{MOR} \equiv \widehat{M'OR}$. În $\triangle MOM'$ care este isoscel, dreapta OR este bisectoare deci și mediană. Rezultă că $MR = M'R$, adică M și M' sînt simetrice față de dreapta OR .

2. Fie funcția $f : \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{1, 3, 5, 7\}$ definită astfel:

$$f(1) = 1, f(2) = 3, f(3) = 5 \text{ și } f(4) = 7$$

și funcția $g : \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{1, 3, 5, 7\}$ definită astfel: $g(x) = 2x - 1$. Să se arate că $f = g$.

3. Se poate asocia expresiei $E = \frac{X}{X^2 - 1}$ o funcție $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, astfel încât $f(x) =$

$$= \frac{x}{x^2 - 1} \text{ pentru orice } x \in \mathbb{R}?$$

4. Folosindu-se diagrama asociată unei funcții, să se determine numărul tuturor funcțiilor definite pe mulțimea $\{1, 2\}$ cu valori în mulțimea $\{3, 5\}$.

5. Fie funcția $f : \mathbb{Z} \rightarrow \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ definită după legea: $f(x)$ este restul împărțirii lui x la 6. Să se determine $f(-12)$, $f(-9)$, $f(3)$, $f(9)$, $f(272)$.

6. Există un număr întreg m astfel încât să existe o funcție $f : \{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$ definită după formula $f(x) = x^2 + m$?

7. Fie funcția $f : \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{2, 4, 6\}$ definită astfel: $f(1) = 4$; $f(2) = 2$; $f(3) = 2$; $f(4) = 6$. Să se traseze graficul acestei funcții.

8. Folosind faptul că graficul funcției de gradul întâi este o dreaptă să se traseze graficele următoarelor funcții:

$$a) f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f_1(x) = \begin{cases} 2x - 1, & \text{dacă } x \leq -1, \\ -5, & \text{dacă } x > -1; \end{cases}$$

$$b) f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f_2(x) = \begin{cases} 2x - 3, & \text{dacă } x \leq 0, \\ 7x, & \text{dacă } x > 0; \end{cases}$$

$$c) f_3 : [-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}; f_3(x) = \begin{cases} 2, & \text{dacă } x \leq 1, \\ 3x - 1, & \text{dacă } x > 1; \end{cases}$$

$$d) f_4 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f_4(x) = \begin{cases} -2x + 3, & \text{dacă } x \leq -1, \\ 5, & \text{dacă } -1 < x < 3, \\ \frac{7}{3}x - 2, & \text{dacă } x \geq 3; \end{cases}$$

$$e) f_5 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, f_5(n) = 2n + 1;$$

$$f) f_6 : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, f_6(x) = 3x - 2.$$

9. Să notăm cu A mulțimea oamenilor de pe glob. Definim funcția $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ după legea „ $f(x)$ = înălțimea lui x “. Este f injectivă? Dar surjectivă?

10. Să se arate că funcția din exercițiul 5) este surjectivă, dar nu este injectivă.

11. Fie mulțimea $A = \{0, 1\}$. Să se construiască toate funcțiile de la A la A și să se precizeze care sînt injective, surjective sau bijective.

12. Folosindu-se diagrama asociată unei funcții să se determine numărul funcțiilor injective de la mulțimea $A = \{1, 2\}$ în mulțimea $B = \{3, 5, 7\}$. Există funcții surjective de la A la B ?

13. Care dintre funcțiile de la exercițiul 8) sînt injective? Dar surjective?

14. Notăm cu A mulțimea orașelor țării noastre, iar B mulțimea județelor țării noastre. Definim funcția $f : A \rightarrow B$ după legea „ $f(a)$ = județul pe teritoriul căreia se află a “ și funcția $g : B \rightarrow A$ după legea „ $g(b)$ = orașul care este reședința județului b “.

- i) Cine este $f(\text{Galați})$ și $f(\text{Făgăraș})$? Cine este $g(\text{Teleorman})$ și $g(\text{Mehedinți})$?
- ii) Să se arate că f este surjectivă și g injectivă.
- iii) Să se arate că $f \circ g = 1_B$ și $g \circ f \neq 1_A$.

15. Se consideră funcțiile $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$; $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definite respectiv prin formulele:

$$f(x) = x^2 + x - 1; g(y) = y^2 - y + 1.$$

Să se determine $g \circ f$ și $f \circ g$.

16. Considerăm funcțiile $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$; $f(x) = \begin{cases} 2x - 3, & \text{dacă } x \leq 0 \\ 7x, & \text{dacă } x > 0 \end{cases}$

$$\text{și } g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; g(x) = \begin{cases} x^2, & \text{dacă } x \leq -2, \\ 2x - 1, & \text{dacă } x > -2. \end{cases}$$

Să se determine $g \circ f$ și $f \circ g$.

17. Fie A o mulțime finită și $f : A \rightarrow A$ o funcție. Să se arate că: f bijectivă $\Leftrightarrow f$ injectivă $\Leftrightarrow f$ surjectivă.

18. Considerăm funcțiile $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$. Să se arate că:

- i) dacă f și g sînt injective, atunci $g \circ f$ este injectivă.
- ii) dacă f și g sînt surjective, atunci $g \circ f$ este surjectivă.

19. Să se determine numărul funcțiilor bijective de la mulțimea $\{1, 2, 3\}$ în mulțimea $\{1, 2, 3\}$.

20. Fie $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ funcția definită astfel: $f(0) = 1$; dacă $n \geq 1$ atunci $f(n)$ este ultima cifră a numărului 7^n .

- i) Calculați $f(1), f(2), \dots, f(7)$.
- ii) Să se arate că $f(n+4) = f(n)$ pentru orice $n \geq 1$.
- iii) Trasați graficul funcției f .

21. Arătați că două funcții $f : A \rightarrow B$ și $g : A \rightarrow B$ sînt egale dacă și numai dacă graficele lor sînt egale.

22. Considerăm funcțiile definite respectiv prin formulele:

i) $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}; f(x) = -x + 4;$

ii) $g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}; g(x) = x + 1;$

iii) $h : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}; h(x) = x^2;$

iv) $k : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}; k(x) = x^2.$

Să se arate că f, g sînt bijective. Cum sînt h și k ?

Să se determine funcțiile inverse pentru f și g .

23. Considerăm funcția $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, definită astfel:

$$f(n) = \begin{cases} n + 1, & \text{dacă } n \text{ este număr par,} \\ n - 1, & \text{dacă } n \text{ este număr impar.} \end{cases}$$

Arătați că f este o bijecție și construiți inversa sa.

24. Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{dacă } x \geq 0, \\ 3x, & \text{dacă } x < 0. \end{cases}$$

Să se arate că f este bijectivă și să se determine inversa sa.

CAPITOLUL III NUMERE REALE

31. REPREZENTAREA NUMERELOR RAȚIONALE SUB FORMĂ DE Fracții Zecimale (Periodice)

1.1. Noțiuni preliminare

În practică se folosește, de obicei, reprezentarea (scrierea) numerelor raționale sub formă de fracții zecimale.

Așa cum este cunoscut din aritmetică, cu ajutorul algoritmului de împărțire orice număr rațional nenegativ $\frac{m}{n}$ ($m \geq 0, n > 0$) se reprezintă sub forma unei fracții zecimale finite sau infinite (adică, cu o infinitate de zecimale). Astfel în loc de $\frac{1}{4}$ se scrie 0,25; în loc de $\frac{5}{8}$ se scrie 0,625; în loc de $\frac{1}{3}$ se scrie 0,333.... Deoarece avem de-a face atât cu fracții zecimale finite, cât și cu fracții zecimale infinite, pentru uniformizare, se pot adăuga la dreapta fracției zecimale finite o infinitate de zerouri.

De exemplu: $\frac{1}{4} = 0,25000\dots$; $\frac{5}{8} = 0,625000\dots$

Astfel putem spune că toate fracțiile zecimale sînt infinite.

Numerele întregi se reprezintă, evident, ca fracții zecimale cu o infinitate de zerouri după virgulă.

De exemplu: $5 = 5,000\dots$; $13 = 13,000\dots$

Așadar, orice număr rațional nenegativ $\frac{m}{n}$, poate fi reprezentat sub forma unei fracții zecimale infinite:

$$\frac{m}{n} = a_0, a_1 a_2 a_3 \dots$$

Numărul a_0 se numește *partea întreagă* a lui $\frac{m}{n}$, iar

$$0, a_1 a_2 a_3 \dots$$

partea fracționară a sa. Numerele a_1, a_2, a_3, \dots sînt cuprinse între 0 și 9, adică $0 \leq a_i \leq 9$, pentru $i = 1, 2, 3, \dots$

Observăm acum că și numerele raționale negative au o astfel de reprezentare. Vom nota partea întreagă a unui număr negativ cu semnul minus deasupra. Astfel numărul $-\frac{5}{2} = -3 + \frac{1}{2}$ se poate scrie sub forma $\overline{3},5000\dots$.

Analog, $-0,321 = \overline{1},679000\dots$;

$$-25\frac{2}{3} = -25,666\dots = -26 + \frac{1}{3} = \overline{26},333\dots$$

În acest mod, orice număr rațional (negativ, pozitiv sau zero) se reprezintă sub forma unei fracții infinite:

$$\frac{m}{n} = a_0, a_1 a_2 a_3 \dots, \quad (1)$$

unde a_0 este partea întreagă a lui $\frac{m}{n}$, iar

$$0, a_1 a_2 a_3 \dots$$

este partea fracționară (zecimală) a sa (a_0 este un număr întreg, iar a_1, a_2, a_3, \dots sînt numere cuprinse între 0 și 9).

Partea fracționară $0, a_1 a_2 a_3 \dots$ din reprezentarea (1) a oricărui număr rațional este un număr pozitiv mai mic decît 1. Reprezentarea numerelor raționale negative sub formă de fracție zecimală, infinită, cu partea întreagă număr negativ (iar partea fracționară un număr pozitiv) o vom face cu scopul de a uniformiza în continuarea acestui capitol studiul numerelor reale (pozitive și negative).

Observație. Scrierea numerelor negative sub forma indicată mai înainte se întâlnește în practică la calculul cu logaritmi.

1.2. Frații zecimale periodice

Să vedem acum care sînt fracțiile zecimale prin care se reprezintă numerele raționale. Mai întîi, să definim fracția zecimală periodică.

Definiție. O fracție zecimală infinită

$$a_0, a_1 a_2 a_3 \dots$$

se numește *periodică*, dacă există numerele naturale k și p astfel încît

$$a_{n+p} = a_n, \text{ pentru orice } n \geq k.$$

O fracție zecimală periodică se notează, pe scurt, prin

$$a_0, a_1 a_2 \dots a_{k-1} (a_k a_{k+1} \dots a_{k+p-1}).$$

Mulțimea cifrelor scrise (în această ordine) în paranteză se numește *perioada fracției zecimale*. Dacă $k = 1$, adică perioada începe imediat după virgulă, avem de-a face cu o *fracție zecimală periodică simplă*; în caz contrar avem de-a face cu o *fracție zecimală periodică mixtă*.

În exemplele numerice de mai înainte fracțiile zecimale sînt periodice. Astfel, pentru $0,333\dots$ avem $k = 1, p = 1$ și $a_{n+1} = a_n = 3$, pentru orice $n \geq 1$. Scriem $0,333\dots = 0,(3)$, aceasta fiind o fracție zecimală periodică

simplă. Frațiile zecimale finite, care după cum am observat pot fi considerate ca fracții zecimale infinite (prin adăugare de zerouri) sînt periodice. De exemplu, pentru $0,25000\dots$ avem $k = 3$, $p = 1$ și $a_{n+1} = a_n = 0$, pentru orice $n \geq 3$; iar pentru $0,625000\dots$ avem $k = 4$, $p = 1$, $a_{n+1} = a_n = 0$, pentru orice $n \geq 4$. Deci $0,25000\dots = 0,25(0)$, iar $0,625000\dots = 0,625(0)$. Așadar acestea sînt fracții zecimale periodice mixte. În sfîrșit, fracția $\overline{15,723\,434\dots}$ este periodică și se scrie, pe scurt, $\overline{15,72(34)}$.

Am observat că reprezentarea unui număr rațional sub formă de fracție zecimală se obține cu ajutorul algoritmului de împărțire. Să considerăm, de exemplu, numerele $\frac{5}{33}$ și $\frac{19}{55}$. Avem:

$$\begin{array}{r|l} 5 & 33 \\ \hline 50 & 0,15\dots \\ 33 & \\ \hline 170 & \\ 165 & \\ \hline 5 & \end{array}$$

Exemplul 1.

$$\begin{array}{r|l} 19 & 55 \\ \hline 190 & 0,345\dots \\ 165 & \\ \hline 250 & \\ 220 & \\ \hline 300 & \\ 275 & \\ \hline 25 & \end{array}$$

Exemplul 2.

Fiecare număr de după virgulă se obține printr-o împărțire parțială.

$$\begin{array}{r|l} 50 & 33 \\ \hline 33 & 1 \\ \hline 17 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 170 & 33 \\ \hline 165 & 5 \\ \hline 5 & \end{array}$$

Exemplul 1.

$$\begin{array}{r|l} 190 & 55 \\ \hline 165 & 3 \\ \hline 25 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 250 & 55 \\ \hline 220 & 4 \\ \hline 30 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 300 & 55 \\ \hline 275 & 5 \\ \hline 25 & \end{array}$$

Exemplul 2.

Fiecare deîmpărțit parțial se deduce din restul precedent prin adăugarea unui zero la dreapta sa, adică mărindu-l de zece ori. Resturile parțiale sînt toate mai mici decît împărțitorul. După un număr finit de operații parțiale se regăsește deci, ori deîmpărțitul inițial (exemplul 1), ori un rest deja întîlnit (exemplul 2). De la acest pas putem să nu mai continuăm împărțirea, deoarece în citul împărțirii lui 5 la 33, respectiv în citul împărțirii lui 19 la 55, cifrele se vor repeta. De aceea

$$\frac{5}{33} = 0,(15); \quad \frac{19}{55} = 0,3(45).$$

În general, avem:

T e o r e m a 1. Orice număr rațional se reprezintă sub formă de fracție zecimală infinită periodică, care nu are perioada (9).

Demonstrație. Dacă a este un număr rațional oarecare, atunci $a = a_0 + a'$, unde a_0 este un număr întreg (partea întreagă a lui a), iar a' este un număr rațional nenegativ mai mic decît 1. Dacă a' se reprezintă sub formă de fracție zecimală periodică, care nu are perioada (9), atunci și a se reprezintă sub formă de fracție zecimală periodică care nu are

Textele însemnate cu o bară la marginea paginii sînt facultative

perioada (9), în care partea întreagă este a_0 , iar partea fracționară îl reprezintă pe a . Așadar, pentru demonstrația teoremei este suficient să considerăm numai numere raționale $\frac{m}{n}$, astfel încît $0 \leq \frac{m}{n} < 1$. Fie deci $\frac{m}{n}$ ($m \geq 0, n > 0$) un astfel de număr rațional. Prin algoritmul de împărțire a lui m la n sînt posibile resturile:

$$0, 1, 2, \dots, n-1.$$

Deoarece resturile iau cel mult n valori, rezultă că după cel mult n pași ai algoritmului se repetă unul din ele. Deci va rezulta o fracție zecimală periodică.

Se arată că nu este posibil ca fracția zecimală periodică asociată unui număr rațional, să aibă perioada (9). Să presupunem, prin absurd, că fracția ar avea perioada (9). Atunci, prin algoritmul de împărțire, ajungem la un moment dat la un rest r astfel încît înmulțindu-l cu 10, și împărțindu-l la n , să se obțină un cît egal cu 9 și restul să fie, de asemenea, r . Deci după teorema împărțirii cu rest, avem:

$$10r = n \cdot 9 + r, \text{ cu } r < n.$$

De aici se obține $9r = 9n$, de unde $r = n$, ceea ce este în contradicție cu ipoteza $r < n$.

Observație. Frațiile zecimale finite (adică de perioadă (0)), se obțin atunci cînd prin algoritmul de împărțire se obține la un moment dat un rest egal cu zero. După aceasta toate resturile vor fi egale cu zero.

Împărțirile parțiale din exemplele precedente se scriu astfel:

Exemplul 1. $50 = 33 \cdot 1 + 17; 170 = 33 \cdot 5 + 5.$

Înmulțind cu 10 prima relație, și folosind pe a doua avem, $500 = (33 \cdot 1 + 17) \cdot 10 = 33 \cdot 10 + 170 = 33 \cdot 10 + (33 \cdot 5 + 5) = 33 \cdot 15 + 5.$

Deci $100 \cdot 5 = 33 \cdot 15 + 5$, adică 15 este cîtul împărțirii lui $100 \cdot 5$ la 33.

Exemplul 2. $190 = 55 \cdot 3 + 25; 250 = 55 \cdot 4 + 30; 300 = 55 \cdot 5 + 25.$

Înmulțind cu 100 prima relație și folosind pe următoarele două avem $19000 = (55 \cdot 3 + 25) \cdot 100 = 55 \cdot 300 + 250 \cdot 10 = 55 \cdot 300 + (55 \cdot 4 + 30) \cdot 10 = 55 \cdot 300 + 55 \cdot 40 + 300 = 55 \cdot 340 + 55 \cdot 5 + 25 = 55 \cdot 345 + 25.$

Deci, $1000 \cdot 19 = 55 \cdot 345 + 25$ și $10 \cdot 19 = 55 \cdot 3 + 25$, adică 345 este cîtul împărțirii lui $1000 \cdot 19$ la 55, iar 3 este cîtul împărțirii lui $10 \cdot 19$ la 55.

În continuare vom observa că reciproca teoremei precedente este, de asemenea, adevărată.

Să dăm mai întîi două exemple:

1) Fie $0, (43)$ o fracție zecimală periodică simplă. Dacă există un număr rațional $\frac{m}{n}$, astfel încît fracția dată să se obțină din acesta prin algoritmul de împărțire, atunci 43 este cîtul întreg al împărțirii lui $100m$ la n ; mai mult, din motive de periodicitate, restul acestei împărțiri este egal cu m . Deci

$$100m = n \cdot 43 + m$$

de unde

$$99m = n \cdot 43.$$

Numărul rațional căutat este $\frac{m}{n} = \frac{43}{99}$.

Verificare. Este suficient să aplicăm algoritmul de împărțire pentru a vedea că numărul rațional $\frac{43}{99}$ se reprezintă sub forma fracției zecimale 0,(43).

2) Fie 0,41(23) o fracție zecimală periodică mixtă. Dacă există un număr rațional $\frac{m}{n}$, astfel încît fracția dată să se obțină din acesta prin algoritmul de împărțire, atunci:

4 123 este citul întreg al împărțirii lui 10 000 m la n , iar 41 este citul întreg al împărțirii lui 100 m la n .

Mai mult, din motive de periodicitate, cele două resturi obținute sînt egale. Deci

$$10\,000\,m = n \cdot 4\,123 + r$$

$$100\,m = n \cdot 41 + r$$

și prin scădere se obține:

$$9\,900\,m = n \cdot (4\,123 - 41).$$

Numărul rațional căutat este:

$$\frac{m}{n} = \frac{4\,123 - 41}{9\,900} = \frac{4\,082}{9\,900}.$$

Verificare. Este suficient să aplicăm algoritmul de împărțire pentru a vedea că numărul rațional $\frac{4\,082}{9\,900}$ se reprezintă sub forma fracției zecimale 0,41(23).

În general, avem:

Teorema 2. Orice fracție zecimală periodică, care are perioada diferită de (9), reprezintă un anumit număr rațional, din care se obține prin algoritmul de împărțire.

Fie

$$a_0, a_1a_2\dots a_{h-1}(a_ha_{h+1}\dots a_{h+p-1}) \quad (1).$$

o fracție zecimală periodică, care nu are perioada (9). Trebuie să arătăm că există un număr rațional, astfel încît fracția dată (1) să se obțină din acesta prin algoritmul de împărțire. Nu vom da o demonstrație a acestei teoreme. Observăm însă că cele două exemple de mai înainte ne sugerează reguli de găsim, în general, a numărului rațional căutat. Astfel:

1°. Dacă $k = 1$, adică fracția este periodică simplă, avem:

$$a_0, (a_1a_2\dots a_p) = a_0 + \underbrace{\frac{a_1a_2\dots a_p}{99\dots 9}}_{p \text{ ori}}$$

(în partea din dreapta a egalității de mai sus $a_1a_2\dots a_p$ reprezintă numărul natural avînd cifrele a_1, a_2, \dots, a_p).

2°. Dacă $k > 1$, adică fracția este periodică mixtă, avem:

$$\begin{aligned} a_0, a_1 a_2 \dots a_{k-1} (a_k a_{k+1} \dots a_{k+p-1}) = \\ = a_0 + \frac{a_1 a_2 \dots a_{k-1} a_k a_{k+1} \dots a_{k+p-1} - a_1 a_2 \dots a_{k-1}}{\underbrace{99 \dots 9}_{p \text{ ori}} \underbrace{00 \dots 0}_{(k-1) \text{ ori}}} \end{aligned}$$

Formulele 1° și 2° dau reguli după care se găsește numărul rațional care se reprezintă sub forma unei fracții zecimale periodice date.

Exemple: 1) $0,(3) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$; $0,(45) = \frac{45}{99} = \frac{5}{11}$;

2) $0,45(3) = \frac{453 - 45}{900} = \frac{408}{900} = \frac{34}{75}$;

3) $0,027(45) = \frac{2745 - 27}{99\,000} = \frac{2\,718}{99\,000} = \frac{151}{5\,500}$.

Observație. Am definit fracțiile zecimale periodice fără a face presupunerea că au sau nu perioada (9). Dacă considerăm o fracție zecimală cu perioada (9), aplicând în mod formal regulile 1° și 2° de mai sus, se obține un număr rațional. Fie, de exemplu, fracția zecimală periodică $0,(9)$. După regula 1°, acestei fracții zecimale îi corespunde numărul rațional

$$0,(9) = \frac{9}{9} = 1.$$

Pe de altă parte numărului 1 îi corespunde prin algoritmul împărțirii fracția lui zecimală $1,000\dots = 1,(0)$.

Să considerăm un alt exemplu și anume fracția zecimală periodică $0,4(9)$ cu perioada (9). După regula 2°, acestei fracții îi corespunde numărul rațional:

$$0,4(9) = \frac{49 - 4}{90} = \frac{45}{90} = \frac{1}{2}.$$

Pe de altă parte numărului rațional $\frac{1}{2}$ îi corespunde prin algoritmul împărțirii fracția zecimală $0,5000\dots = 0,5(0)$.

Din cele două exemple rezultă că teorema precedentă (în ultima sa parte) nu mai este adevărată pentru fracțiile zecimale infinite cu perioada (9). Mai precis, dacă este dată o fracție zecimală infinită cu perioada (9), acesteia îi corespunde după regula 1° sau

regula 2° un număr rațional $\frac{m}{n}$. Însă acestui număr rațional $\frac{m}{n}$, prin algoritmul îm-

părțirii, nu-i mai corespunde fracția zecimală dată, ci o fracție care se obține din aceasta prin mărirea cu o unitate a numărului din fața primei perioade și înlăturarea cifrelor următoare. Se poate vedea ușor că această regulă se referă la toate fracțiile zecimale periodice cu perioada (9).

De aceea, ori de câte ori întâlnim în calcule o fracție zecimală cu perioada (9) convenim să o înlocuim cu fracția zecimală cu perioada (0) (finită) obținută după regula enunțată mai înainte. De exemplu:

$$0,4(9) = 0,5(0); \quad 0,1(9) = 0,2(0).$$

În concluzie, numerele raționale (și numai ele) se reprezintă sub formă de fracții zecimale infinite periodice. Dar există fracții zecimale care nu sînt periodice? Răspunsul la această întrebare este afirmativ. De exemplu, fracția

0,101001000100001000001...

(după primul 1 este un 0, după al doilea sînt doi de 0 etc.) este o fracție zecimală infinită neperiodică.

Într-adevăr, să presupunem că această fracție este periodică, și fie p numărul cifrelor din perioadă. Perioada trebuie să conțină și o unitate. De aceea între orice două unități consecutive (de după virgulă) nu pot fi mai mult de $p - 1$ zerouri; contradicție. Contradicția obținută arată că fracția este neperiodică.

În paragraful următor se vor indica probleme concrete care conduc la fracții zecimale infinite neperiodice.

12. NUMERELE REALE CA FRAȚII ZECIMALE INFINITE

În clasele anterioare a fost prezentată necesitatea lărgirii mulțimii \mathbb{Q} a numerelor raționale, obținîndu-se astfel mulțimea \mathbb{R} a numerelor reale.

Iată două probleme concrete care conduc la aceasta.

1) Nu există nici un număr rațional al cărui pătrat să fie 2.

Într-adevăr, să presupunem, prin absurd că există un număr rațional $\frac{m}{n}$, astfel încît $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$. Putem presupune că fracția $\frac{m}{n}$ este ireductibilă, adică

m și n sînt numere întregi prime între ele. Din $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$ rezultă $m^2 = 2n^2$.

Cum $2n^2$ este număr par, atunci și m^2 este par și deci m este par. Fie $m = 2k$, k un număr întreg. Înlocuind pe $m = 2k$ în relația precedentă, rezultă $4k^2 = 2n^2$, de unde $2k^2 = n^2$, adică n este par. Deci m și n sînt numere întregi pare, ceea ce contrazice ireductibilitatea fracției $\frac{m}{n}$. Prin urmare presupu-

nerea noastră că $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$ este falsă. Acest fapt arată că ecuația cu coeficienți întregi $x^2 - 2 = 0$ nu are, ca soluții, numere raționale.

2) Fie acum un triunghi dreptunghic isoscel ABC (fig. III.1).

Alegînd cateta $[AB]$ ca unitate de măsură (adică de lungime 1), vom arăta că nu există un număr rațional $\frac{m}{n}$ care să reprezinte lungimea lui BC adică a n -a parte din AB să se cuprindă de m ori în BC . Într-adevăr, dacă lungimea lui $[BC]$ s-ar exprima prin numărul



Fig. III.1

rațional $\frac{m}{n}$. atunci conform teoremei lui Pitagora rezultă $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$. Dar am arătat la pct. 1) că o astfel de relație nu poate avea loc.

Dacă $BC = a$, rezultă că a este o rădăcină a ecuației $x^2 - 2 = 0$. Notăm $a = \sqrt{2}$, care reprezintă lungimea ipotenuzei. Am văzut că $\sqrt{2}$ nu este un număr rațional, deci el va fi un număr de o natură nouă. Un astfel de număr, care nu este rațional îl numim *irațional*. În același mod numerele $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ ș.a. care sînt rădăcini ale ecuațiilor: $x^2 - 3 = 0$, $x^2 - 5 = 0$ ș.a. sînt numere iraționale. (Există și numere iraționale care nu sînt rădăcini ale unor ecuații, de exemplu numărul π care este egal cu raportul dintre lungimea unui cerc și diametrul său.) Mulțimea numerelor raționale împreună cu mulțimea numerelor iraționale formează mulțimea \mathbf{R} a numerelor reale.

În clasele anterioare, a fost indicat un algoritm de construcție a fracției zecimale sub care se reprezintă $\sqrt{2}$:

$$\sqrt{2} = 1,41421356... .$$

Deoarece $\sqrt{2}$ este număr irațional rezultă că fracția zecimală care-l reprezintă este o fracție zecimală infinită neperiodică. (Și numărul π are o reprezentare ca fracție zecimală infinită neperiodică.)

Acceptăm că fiecare fracție zecimală neperiodică infinită reprezintă un număr real, mai precis un număr irațional.

În acest mod orice număr real a se reprezintă printr-o fracție zecimală infinită (periodică sau neperiodică) $a_0, a_1a_2a_3...$.

Funcția

$$a \rightarrow a_0, a_1a_2a_3... ,$$

de la mulțimea numerelor reale la mulțimea fracțiilor zecimale infinite, care nu au perioada (9), este bijectivă, adică fiecărui număr real i se asociază o fracție zecimală, care nu are perioada (9), bine determinată, și fiecare astfel de fracție zecimală reprezintă un număr real bine determinat.

Teoria riguroasă a numerelor reale ca fracții zecimale infinite depășește programa clasei a IX-a. Introducerea fracțiilor zecimale infinite ne permite să pătrundem mai mult în natura acestor noi numere (iraționale).

Observație. Pentru simplitate, pe baza bijecției precedente, vom identifica în continuare numărul real cu fracția zecimală prin care se reprezintă, adică

$$a = a_0, a_1a_2a_3...$$

În particular, numerele raționale se identifică cu fracțiile zecimale periodice (de perioadă diferită de (9)) prin care se reprezintă.

§3. ORDONAREA NUMERELOR REALE

Vom defini ordinea pe mulțimea numerelor reale, folosind reprezentarea lor zecimală, astfel încît aceasta să coincidă pentru numerele raționale cu cea deja introdusă pentru aceste numere în clasele anterioare.

Fie $a = a_0, a_1a_2a_3\ldots$ și $b = b_0, b_1b_2b_3\ldots$ două numere reale, unde fracțiunile $a_0, a_1a_2a_3\ldots$ și $b_0, b_1b_2b_3\ldots$ nu au perioada (9).

Spunem că cele două numere sînt *egale* dacă oricare ar fi $i = 0, 1, 2, \ldots$ avem $a_i = b_i$.

Definiție. Spunem că numărul real $a = a_0, a_1a_2a_3\ldots$ este *mai mic decît* numărul real $b = b_0, b_1b_2b_3\ldots$ și scriem

$$a < b$$

dacă există un număr natural $k \geq 0$, astfel încît $a_k < b_k$ și $a_i = b_i$ pentru orice $i < k$.

În acest caz se mai spune că b este *mai mare decît* a și se scrie $b > a$.

Exemple. 1) $3,9014 \ldots < 4,1735 \ldots$, deoarece $a_0 = 3 < 4 = b_0$.

2) $3,45170 \ldots < 3,45181 \ldots$, deoarece $a_0 = b_0 = 3, a_1 = b_1 = 4, a_2 = b_2 = 5, a_3 = b_3 = 1, a_4 < b_4$ ($7 < 8$).

3) $\overline{20},432 \ldots < 1,720 \ldots$, deoarece $a_0 = -20 < 1 = b_0$.

4) $3,173 \ldots > 3,165 \ldots$, deoarece $a_0 = b_0 = 3, a_1 = b_1 = 1$ și $a_2 > b_2$ ($7 > 6$).

5) $\overline{4},232 \ldots > \overline{4},193 \ldots$, deoarece $a_0 = b_0 = -4, a_1 > b_1$ ($2 > 1$).

Dacă $a < 0$ se spune că numărul real a este *negativ*, iar dacă $a > 0$ atunci a se numește *pozitiv*. Este clar că un număr real $a = a_0, a_1a_2a_3\ldots$ este negativ dacă și numai dacă partea sa întreagă a_0 este număr negativ.

De exemplu,

$$\overline{1},372 \ldots < 0,000 \ldots = 0, \text{ deoarece } a_0 = -1 < 0.$$

Observație. Pentru numerele raționale, definiția inegalităților dată mai înainte este tocmai cea pe care o cunoaștem din clasele anterioare. Astfel:

$$0,5000 \ldots < 0,51000 \ldots \text{ dacă și numai dacă } \frac{1}{2} < \frac{51}{100}.$$

$$0,3000 \ldots < 0,334000 \ldots \text{ dacă și numai dacă } \frac{1}{3} < \frac{334}{900}.$$

Este adevărată următoarea proprietate numită *legea de tricotomie*:

Dacă a și b sînt două numere reale, atunci este adevărată una și numai una din relațiile:

$$a > b, \quad a = b, \quad a < b.$$

Definiție. Se spune că numărul real a este *mai mic sau egal* cu numărul real b , și scriem $a \leq b$ dacă $a < b$ sau $a = b$.

Relația „ \leq ” are următoarele proprietăți:

- 1) $a \leq a$, oricare ar fi a din \mathbb{R} (*reflexivitatea*),
- 2) dacă $a \leq b$ și $b \leq a$ atunci $a = b$ (*antisimetria*),
- 3) dacă $a \leq b$ și $b \leq c$ atunci $a \leq c$ (*tranzitivitatea*).

Această relație se numește *relația de ordine* pe mulțimea numerelor reale.

Observăm că proprietatea de tranzitivitate o posedă și relația „<”, adică dacă $a < b$ și $b < c$, atunci $a < c$.

Revenim cu alte proprietăți ale inegalităților în § 5.

§4. APROXIMĂRI ZECIMALE ALE NUMERELOR REALE

În practică, aproape niciodată nu se cunosc valorile exacte ale mărimilor. Orice instrument sau aparat nu arată cu exactitate absolută mărimile. Orice termometru indică temperatura cu o oarecare eroare, nici un ampermetru nu poate indica intensitatea exactă a curentului etc. O anumită eroare se face chiar la citirea rezultatelor măsurărilor pe aparate. De aceea în loc să operăm cu valorile exacte ale mărimilor, sintem obligați să operăm cu valorile lor aproximative. În general, o mărime se reprezintă printr-o fracție zecimală infinită, dar un aparat nu poate indica, practic, decît un număr finit dintre zecimale, adică o valoare aproximativă a mărimii.

Fie a un număr real oarecare reprezentat sub formă de fracție zecimală infinită. *Aproximările (valorile aproximative) zecimale prin lipsă* ale numărului a se definesc ca fiind numerele care se obțin prin înlăturarea succesivă a tuturor cifrelor sale care stau după virgulă, începînd cu prima cifră, apoi cu cea de-a doua, după aceea cu cea de-a treia ș.a.m.d.

De exemplu, pentru numărul $a = 2,173256\dots$, aproximările zecimale prin lipsă vor fi:

$$2; 2,1; 2,17; 2,173; 2,1732; 2,17325; \dots$$

Dacă la ultimul număr de după virgulă al fiecărei aproximări zecimale prin lipsă a numărului a se adaugă 1, atunci se obțin *aproximările (valorile aproximative) zecimale prin adaos* ale numărului a . De exemplu, pentru numărul $2,173256\dots$, astfel de aproximări zecimale vor fi:

$$3; 2,2; 2,18; 2,174; 2,1733; 2,17326; \dots$$

Avînd în vedere relația de ordine pe mulțimea numerelor reale, introdusă în § 3, primele cinci aproximări zecimale ale lui a se pot ilustra în următorul tabel:

$$\begin{aligned} 2 &\leq a < 3 \\ 2,1 &\leq a < 2,2 \\ 2,17 &\leq a < 2,18 \\ 2,173 &\leq a < 2,174 \\ 2,1732 &\leq a < 2,1733. \end{aligned}$$

Cum numărul $a = 2,173256\dots$ este cuprins între:

1) 2 și 3 și $3 - 2 = 1$;

2) 2,1 și 2,2 și $2,2 - 2,1 = 0,1$;

3) 2,17 și 2,18 și $2,18 - 2,17 = 0,01$ ș.a.m.d.

aceste aproximări zecimale sînt, respectiv, cu o eroare mai mică decît 1; $0,1 = 10^{-1}$; $0,01 = 10^{-2}$ ș.a.m.d.

În general, pentru numărul $a = a_0, a_1 a_2 a_3 \dots a_n \dots$ aproximările zecimale cu o eroare mai mică decât 10^{-n} , sînt:

i) prin lipsă: $a'_n = a_0, a_1 a_2 a_3 \dots a_n,$

ii) prin adaos: $a''_n = a_0, a_1 a_2 a_3 \dots a_n + 10^{-n}.$

Observații. 1) Dacă numărul a este reprezentat de o fracție periodică cu perioada (0), atunci începînd cu un anumit rang, aproximările zecimale prin lipsă ale sale sînt egale cu numărul însuși. De exemplu, pentru numărul $1,52 = 1,52000\dots$, avem:

1; 1,5; 1,52; 1,520; 1,5200;

De aceea, pentru a cuprinde toate cazurile, în tabelul cu aproximațiile zecimale ale unui număr real, inegalitatea din stînga o scriem „ \leq ”.

2) Scrierea valorilor aproximative a'_n și a''_n o vom face sub formă de fracție zecimală finită, fără a mai adăuga la dreapta o infinitate de zerouri.

După definiție (vezi i) și ii)), precum și observația precedentă, pct. 1) rezultă că numărul a este mai mare sau egal cu orice aproximare zecimală prin lipsă a sa și mai mic decât orice aproximare zecimală prin adaos a sa.

Așadar, unui număr real a i se asociază aproximările sale zecimale:

prin lipsă: $a'_0, a'_1, a'_2, a'_3, \dots$

prin adaos: $a''_0, a''_1, a''_2, a''_3, \dots$

astfel încît

$a'_0 \leq a < a''_0$ (cu o eroare mai mică decât 1)

$a'_1 \leq a < a''_1$ (cu o eroare mai mică decât 0,1)

$a'_2 \leq a < a''_2$ (cu o eroare mai mică decât 0,01)

.....

.....

Observație. Este foarte important de semnalat pentru cele ce urmează că aproximările zecimale prin lipsă și prin adaos ale unui număr real a , sînt întotdeauna numere raționale

5. ADUNAREA ȘI ÎNMULȚIREA NUMERELOR REALE

5.1. Vom defini adunarea și înmulțirea numerelor reale, folosind reprezentarea lor zecimală, astfel încît aceste operații să coincidă pentru numerele raționale cu adunarea și înmulțirea deja introduse în clasele anterioare.

Fie date două numere reale a și b și să considerăm aproximările zecimale prin lipsă și adaos cu o eroare mai mică decât 10^{-n} . Atunci pentru orice n , avem:

$$a'_n \leq a < a''_n,$$

$$b'_n \leq b < b''_n.$$

După cum am observat la sfîrșitul paragrafului precedent, numerele a'_n, a''_n, b'_n, b''_n sînt raționale și deci, de la adunarea numerelor raționale, în sens sumele $a'_n + b'_n$ și $a''_n + b''_n$, pentru orice n .

Definiție. Se numește *suma numerelor reale* a și b un număr real c , care pentru orice număr natural n , satisface inegalitățile:

$$a'_n + b'_n \leq c < a''_n + b''_n.$$

Se poate demonstra că un astfel de număr real c există și, mai mult, este unic. Demonstrația riguroasă a acestui fapt depășește programa clasei a IX-a. Ea necesită noțiunea de limită și se va face la Analiză matematică în clasa a XI-a.

În exemplele de mai jos vom arăta cum această definiție a sumei ne permite să găsim valoarea aproximativă a ei, cu o eroare oricât de mică dorim.

Exemple. 1) Să găsim primele patru cifre după virgulă pentru suma numerelor $a = \sqrt{2}$ și $b = \sqrt{5}$.

Avem:

$1 \leq \sqrt{2} < 2$	$2 \leq \sqrt{5} < 3$
$1,4 \leq \sqrt{2} < 1,5$	$2,2 \leq \sqrt{5} < 2,3$
$1,41 \leq \sqrt{2} < 1,42$	$2,23 \leq \sqrt{5} < 2,24$
$1,414 \leq \sqrt{2} < 1,415$	$2,236 \leq \sqrt{5} < 2,237$
$1,4142 \leq \sqrt{2} < 1,4143$	$2,2360 \leq \sqrt{5} < 2,2361$
$1,41421 \leq \sqrt{2} < 1,41422$	$2,23606 \leq \sqrt{5} < 2,23607$

Deci $a'_5 + b'_5 = 3,65027 \leq \sqrt{2} + \sqrt{5} < a''_5 + b''_5 = 3,65029$ de unde

$$\sqrt{2} + \sqrt{5} = 3,6502\dots$$

2) Să găsim primele patru cifre după virgulă pentru suma numerelor $a = \overline{3,12714\dots}$ și $b = 2,42731\dots$ (celelalte cifre după virgulă care ar urma după cele scrise nu au importanță, pentru problema pusă).

Avem $a'_5 + b'_5 = \overline{1,55445} \leq a + b < a''_5 + b''_5 = \overline{1,55447}$. Astfel, putem scrie patru cifre după virgulă pentru suma

$$a + b = \overline{1,5544\dots} = -0,4456\dots$$

3) Fie numerele $a = 2,23751\dots$ și $b = 3,76248\dots$. Atunci $a'_5 + b'_5 = 5,99999$, iar $a''_5 + b''_5 = 6,00001$. Deci, 6,00000 este o valoare aproximativă a sumei $a + b$, cu o eroare mai mică decât 10^{-5} .

Analog, se definește produsul numerelor reale nenegative.

Observăm mai întâi, ca și pentru sumă, că deoarece a'_n, a''_n, b'_n, b''_n sînt numere raționale, produsele $a'_n b'_n$ și $a''_n b''_n$ au sens și sînt produse de numere raționale.

Definiție. Se numește *produsul numerelor reale nenegative* a și b , un număr real d , care pentru orice număr natural n , satisface inegalitățile:

$$a'_n b'_n \leq d < a''_n b''_n.$$

Se poate demonstra că un astfel de număr real d există și este unic.

Dacă unul sau ambele numere sînt negative, atunci se înmulțesc valorile lor absolute și apoi se ține seamă de cunoscuta regulă a semnelor și anume:

1° produsul este pozitiv dacă ambii factori au același semn și atunci:

$$ab = |a| |b|;$$

2° produsul este negativ dacă semnele factorilor sînt diferite și atunci:

$$ab = - |a| |b|.$$

Exemple. 1) Să se calculeze pătratul numărului

$$a = 1,4142\dots$$

Avem $a'_4 = 1,4142$ și $a''_4 = 1,4143$. Atunci:

$$a'^2_4 = 1,99996164 \leq a^2 < a''^2_4 = 2,00024449.$$

Se observă că pătratul numărului a este foarte aproape de numărul 2.

2) Să se găsească trei cifre după virgulă pentru produsul numerelor $a = \frac{1}{3}$

și $b = \sqrt{2}$.

Avem $a = 0,3333\dots$ și $\sqrt{2} = 1,41421\dots$. Atunci

$0 \leq a < 1$	$1 \leq b < 2$
$0,3 \leq a < 0,4$	$1,4 \leq b < 1,5$
$0,33 \leq a < 0,34$	$1,41 \leq b < 1,42$
$0,333 \leq a < 0,334$	$1,414 \leq b < 1,415$
$0,3333 \leq a < 0,3334$	$1,4142 \leq b < 1,4143$

Deci

$$\begin{aligned} 0 &\leq ab < 2 \\ 0,42 &\leq ab < 0,6 \\ 0,4653 &\leq ab < 0,4828 \\ 0,47062 &\leq ab < 0,47261 \\ 0,47135286 &\leq ab < 0,47152762. \end{aligned}$$

Astfel am obținut:

$$ab = 0,471\dots$$

5.2. Proprietățile adunării și înmulțirii numerelor reale.

Proprietățile Inegalităților

Menționăm în continuare proprietățile operațiilor de adunare și înmulțire a numerelor reale, precum și unele proprietăți ale inegalităților. Pe baza definițiilor operațiilor de adunare și înmulțire date mai înainte și folosind proprietățile corespunzătoare ale adunării și înmulțirii numerelor raționale, verificarea acestora se face fără dificultate. Lăsăm ca exercițiu demonstrarea lor.

Adunarea pe mulțimea \mathbb{R} a numerelor reale are proprietățile:

1° este *comutativă*, adică oricare ar fi a și b din \mathbb{R} , avem

$$a + b = b + a.$$

2° este *asociativă*, adică oricare ar fi a , b și c din \mathbb{R} , avem

$$(a + b) + c = a + (b + c).$$

3° numărul 0 este *element neutru* pentru adunare, adică oricare ar fi a din \mathbf{R} , avem

$$a + 0 = 0 + a = a.$$

4° orice număr real a are un *opus*, care este $-a$, adică

$$a + (-a) = (-a) + a = 0.$$

Ca de obicei, în loc de $a + (-b)$ vom scrie $a - b$.

Înmulțirea numerelor reale are proprietățile:

1. este *comutativă*, adică oricare ar fi a și b din \mathbf{R} , avem

$$ab = ba;$$

2. este *asociativă*, adică oricare ar fi a , b și c din \mathbf{R} , avem

$$(ab)c = a(bc);$$

3. numărul 1 este *element neutru* pentru înmulțire, adică oricare ar fi a din \mathbf{R} , avem

$$a1 = 1a = a;$$

4. orice număr real a diferit de zero are un *invers*, adică există un număr real, notat cu a^{-1} , astfel încît

$$aa^{-1} = a^{-1}a = 1;$$

5. este *distributivă față de adunare*, adică oricare ar fi a , b , c din \mathbf{R} au loc egalitățile:

$$a(b + c) = ab + ac,$$

$$(a + b)c = ac + bc.$$

Ca de obicei, în loc de ab^{-1} ($b \neq 0$), vom scrie $a : b$ sau $\frac{a}{b}$.

Am dat în § 3 unele proprietăți ale inegalităților pe mulțimea numerelor reale. Dăm mai jos și alte proprietăți ale lor legate de operațiile de adunare și înmulțire. Astfel:

1° dacă $a < b$, iar c este un număr real oarecare, atunci

$$a + c < b + c,$$

2° dacă $a < b$ și $c > 0$, atunci $ac < bc$,

3° dacă $a < b$ și $c < 0$, atunci $ac > bc$.

De aici rezultă ușor că:

4° dacă $a < b$ și $c < d$ atunci $a + c < b + d$ și $a - d < b - c$,

5° dacă a , b , c , d sînt numere reale pozitive astfel încît $a < b$ și $c < d$, atunci $ac < bd$. În aceleași condiții, avem și $\frac{a}{d} < \frac{b}{c}$.

Aceleași proprietăți (1°, 2°, 3°, 4°, 5°) sînt valabile și pentru relația „ \leq ”.

Observație. În general, cînd se lucrează cu numere reale nu se recurge neapărat la reprezentarea lor zecimală. Rezultatul unei probleme poate fi dat sub forma: $\sqrt{2} + \sqrt{3}$, $a^2(2 + \sqrt{5})$, $\frac{1}{3}\sqrt{7}$, $\frac{\pi^2}{5}$.

1.6. INTERPRETAREA GEOMETRICĂ A NUMERELOR REALE

Fie d o dreaptă oarecare pe care fixăm un punct O numit origine (fig. III.2) și sensul pozitiv de la stînga la dreapta. Originea împarte dreapta d în două semidrepte (Ox și Ox' ; Ox este *semiaxa pozitivă*, iar Ox' *semiaxa negativă*). Dacă fixăm o unitate de măsură, atunci distanța AB dintre orice două puncte A și B ale dreptei d se exprimă printr-un număr nenegativ

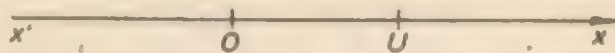


Fig. III.2

Să alegem ca unitate de măsură lungimea segmentului $[OU]$; atunci $OU = 1$.

Dacă M este un punct al semiaxei pozitive Ox , să notăm cu $x_M = OM$, abscisa sa. În acest mod se definește o funcție

$$M \rightarrow x_M$$

de la punctele semidrepte (Ox) la mulțimea numerelor reale pozitive.

În cursul de Geometrie se afirmă că: pentru orice număr real pozitiv (lungime) x , există un punct bine determinat M pe semiaxa Ox , care să se găsească la distanța x de punctul O , adică $x_M = x$. Aceasta ne spune că funcția definită mai înainte este bijectivă.

Dacă punctul M aparține semiaxei negative Ox' , abscisa sa este numărul $x_M = -OM$. Convenim ca $x_O = 0$ (zero).

Atunci funcția

$$M \rightarrow x_M$$

definită pe toată dreapta d cu valori în mulțimea \mathbb{R} a numerelor reale stabilește o bijecție între aceste două mulțimi. De aceea mulțimea numerelor reale se numește adesea *dreapta numerică* sau *dreapta reală*, sau *axa reală*, iar elementele (numerele) sale se numesc *punctele dreptei numerice*. Bijecția stabilită permite să folosim, adesea, pentru numere, terminologia geometrică.

Există procedee simple de construcție cu rigla și compasul a unor puncte pe axa $x'x$ care corespund unor anumite numere reale (cum ar fi: numerele raționale, precum și unele numere iraționale ca: $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ ș.a.).

În acest sens vom prezenta următorul exemplu:

Exemplu. Să se construiască pe dreapta d , cu ajutorul riglei și compasului, numărul $\sqrt{2}$ (fig. III.3).

Se construiește pătratul de latură $[OU]$: $OU = 1$. Conform teoremei lui Pitagora, $OA^2 = OU^2 + AU^2 = 1 + 1 = 2$. Deci $OA = \sqrt{2}$. Cu ajutorul compasului se construiește $OM = OA = \sqrt{2}$.

Pe semiaxa Ox am reprezentat și aproximările zecimale prin lipsă și prin adaos cu o eroare mai mică decît 1; 0,1 respectiv 0,01 ale lui $\sqrt{2}$.

Să vedem sensul intuitiv al teoremei amintite mai înainte, cu ajutorul reprezentării sub formă de fracție zecimală a numerelor reale. De la reprezentarea numerelor raționale pe dreaptă, știm să construim un punct M a cărui abscisă este un număr care se reprezintă sub formă de fracție zecimală finită.

Fie

$$a = a_0, a_1 a_2 a_3 \dots$$

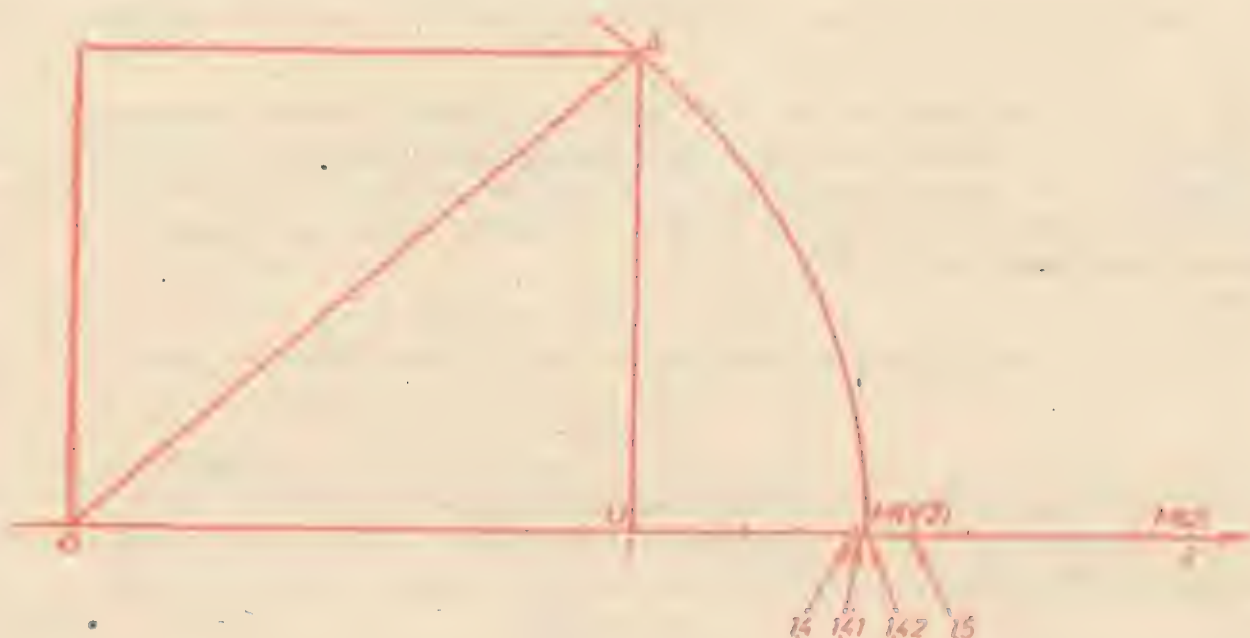


Fig. III.3

un număr real oarecare și

$$a'_0, a'_1, a'_2, \dots$$

$$a''_0, a''_1, a''_2, \dots$$

aproximările zecimale prin lipsă și prin adaos ale lui a . Să considerăm segmentul $\Delta_n = [M(a'_n), M(a''_n)]$ cu capetele a'_n și a''_n și de lungime 10^{-n} . Avem

$$\Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \Delta_3 \supset \dots \supset \Delta_n \supset \Delta_{n+1} \supset \dots$$

Se arată că există un singur punct care să aparțină tuturor segmentelor Δ_n , pentru orice n . Acesta este punctul $M(a)$.

De exemplu, fie $a = 1,671\dots$

Atunci

$$1 \leq a < 2$$

$$1,6 \leq a < 1,7$$

$$1,67 \leq a < 1,68.$$

Interpretarea geometrică este dată în figura III.4.

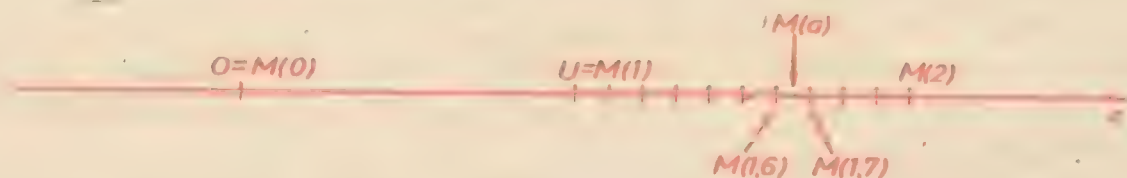


Fig. III.4

EXERCITII

1. Să se scrie sub formă de fracție zecimală infinită, numerele:

a) 3; b) $\frac{15}{8}$; c) $\frac{1}{4}$; d) 0; e) $-\frac{1}{4}$; f) $-\frac{2}{3}$; g) $-\frac{29}{11}$; h) $-\frac{123}{17}$.

2. Pentru fracțiile zecimale pericdice următoare, să se găsească numărul rațional pe care-l reprezintă și să se verifice apoi prin algoritmul de împărțire că se obține fracția zecimală inițială:
- a) $1,33(4)$; b) $0,(7)$; c) $-0,(14)$; d) $2,073(83)$; e) $-0,01(023)$; f) $-2,001(7)$.
3. Să se arate care dintre numerele de mai jos sînt raționale:
 $-1,3$; $3,75$; $\sqrt{3}$; $\sqrt{5}$; $\sqrt{6}$; $0,34344344434444344444\ldots$ (după primul 3 urmează un 4; după al doilea 3 urmează doi de 4 ș.a.m.d.); $0,12345678910111213\ldots$ (după virgulă se scriu în ordine toate numerele naturale).
4. Să se indice cîteva numere naturale n astfel încît
 a) \sqrt{n} este rațional; b) \sqrt{n} nu este rațional.
5. Să se arate că nu există numere raționale $\frac{m}{n}$ astfel încît.
 a) $\left(\frac{m}{n}\right)^3 = 2$; b) $\left(\frac{m}{n}\right)^3 = 3$; c) $\left(\frac{m}{n}\right)^3 = 6$.
6. Să se spună care numere din perechile de numere următoare este mai mare și care este mai mic:
 a) $3,43479\ldots$ și $3,43497\ldots$; b) $15,25\ldots$ și $\frac{61}{4}$; c) $\frac{5}{9}$ și $0,(5)$; d) $-\frac{3}{8}$ și $-0,375\ldots$;
 e) $-5,4833\ldots$ și $-5,5829\ldots$; f) $0,(6)$ și $\frac{2}{3}$; g) 0 și $-0,00011$; h) $-1,1$ și $-1,1(01)$.
7. i) Să se găsească aproximările zecimale cu o eroare mai mică decît $0,1$, prin lipsă și adaos, pentru numerele;
 a) $\sqrt{5}$; b) $-\sqrt{5}$; c) $\frac{11}{7}$; d) $-\frac{11}{7}$; e) $\sqrt{7}$; f) $-\sqrt{7}$; g) $\frac{178}{13}$; h) $\sqrt{11}$;
 ii) Să se găsească apoi pentru aceleași numere primele trei aproximări zecimale prin lipsă și adaos.
8. Fie $x = 2,7154\ldots$ și $y = 1,4287\ldots$. Să se găsească primele trei cifre după virgulă ale sumei $x + y$.
9. Fie $x = 2,1468\ldots$ și $y = 1,5431\ldots$. Să se găsească primele două cifre după virgulă ale produsului lui x cu y .
10. Să se găsească primele patru cifre după virgulă ale sumelor:
 a) $\frac{1}{3} + \sqrt{3}$; b) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$; c) $\sqrt{5} + \sqrt{7}$; d) $\sqrt{3} + (-\sqrt{7})$; e) $(-\sqrt{3}) + \sqrt{7}$.
11. Să se găsească primele trei cifre după virgulă ale produselor:
 a) $\frac{1}{2} \cdot \sqrt{7}$; b) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{7}$; c) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{5}$; d) $\sqrt{3} \cdot (-\sqrt{5})$; e) $\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$.
12. a) Să se construiască cu rigla și compasul segmentele de lungime: $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{10}$, și apoi să se figureze pe axă.
 b) Să se figureze pe axa reală punctele care au abscisele:
 $-\sqrt{3}$; $\sqrt{3}$; $-\sqrt{5}$; $\sqrt{5}$; $-\sqrt{6}$; $\sqrt{6}$; $-\sqrt{10}$; $\sqrt{10}$.
- Indicație. Se folosește teorema lui Pitagora.
13. Să se arate că numerele $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ și $\sqrt{2} - \sqrt{3}$ sînt iraționale.

14. Fie a și b numere reale astfel încât $a + b$ și $a - b$ să fie numere raționale. Sînt numerele a , b și $a \cdot b$ raționale?

15. Fie a și b numere raționale. Să se demonstreze că dacă $a + b\sqrt{2} \neq 0$, atunci și $a - b\sqrt{2} \neq 0$.

16. Fie a un număr. Este posibil oare ca primele 10 puteri ale numărului a

$$a, a^2, a^3, \dots, a^{10}$$

să fie iraționale, iar următoarele 10 puteri:

$$a^{11}, a^{12}, a^{13}, \dots, a^{20}$$

să fie raționale?

17. Dați exemple de ecuații de gradul al doilea cu coeficienți întregi ale căror rădăcini să fie iraționale.

18. Să se demonstreze că ecuația $x^3 - px + 1 = 0$, pentru $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$, nu are rădăcini raționale.

Indicație. Dacă $\alpha = \frac{m}{n}$ este o rădăcină a ecuației, atunci se arată că m și n sînt $+1$ sau -1 ; deci α este egal cu 1 sau -1 , dar aceste numere nu sînt, evident, rădăcini ale ecuației.

CAPITOLUL IV

FUNCȚIA DE GRADUL AL DOILEA

§1. DEFINIȚIA FUNCȚIEI DE GRADUL AL DOILEA. EXEMPLE

Definiție. Fiind date numerele reale, a, b, c cu $a \neq 0$, funcția

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

definită prin formula: $f(x) = ax^2 + bx + c$, se numește *funcție de gradul al doilea cu coeficienții a, b, c* .

Observații 1) Domeniul și codomeniul funcției de gradul al doilea este mulțimea numerelor reale. Deci funcția de gradul al doilea este o funcție numerică.

2) Deoarece domeniul și codomeniul funcției de gradul al doilea este \mathbb{R} vom indica această funcție astfel:

$$f(x) = ax^2 + bx + c \text{ sau } y = ax^2 + bx + c.$$

3) O funcție de gradul al doilea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$ este perfect determinată când se cunosc numerele reale a, b, c ($a \neq 0$).

4) Trebuie să observăm că în definiția funcției de gradul al doilea condiția $a \neq 0$ este esențială în sensul că ipoteza $a = 0$ conduce la funcția de gradul întâi, studiată în clasa a VIII-a.

5) Denumirea de funcție de gradul al doilea provine din faptul că este definită prin intermediul trinomului de gradul al doilea $aX^2 + bX + c$.

Exemple de funcții de gradul al doilea

- | | |
|--|--|
| 1) $f_1(x) = 7x^2 - 9x + 10,$ | $(a = 7, b = -9, c = 10);$ |
| 2) $f_2(x) = \sqrt{2}x^2 + \sqrt{2}x + 1,$ | $(a = \sqrt{2}, b = \sqrt{2}, c = 1);$ |
| 3) $f_3(x) = 0,51x^2 - 2x,$ | $(a = 0,51, b = -2, c = 0);$ |
| 4) $f_4(x) = x^2 + 0,31,$ | $(a = 1, b = 0, c = 0,31);$ |
| 5) $f_5(x) = -x^2 - 5x - 0,31,$ | $(a = -1, b = -5, c = -0,31).$ |

Probleme care conduc la funcția de gradul al doilea

Există numeroase exemple concrete care au impus studiul sistematic al funcției de gradul al doilea:

1) Aria A a unui pătrat este funcție de lungimea laturii sale x . Mai precis, această dependență funcțională este dată de relația:

$$A = x^2$$

2) Aria A a unui cerc este funcție de lungimea razei sale x ; această dependență funcțională se exprimă astfel:

$$A = \pi x^2,$$

unde π este o constantă aproximativ egală cu 3,14.

3) În fizică se arată că în căderea liberă a unui corp în vid, sub acțiunea forței gravitaționale, spațiul $s(t)$ parcurs de corp în timpul t este dat de formula:

$$s(t) = \frac{g}{2} t^2,$$

unde g este o constantă aproximativ egală cu 9,8 m/s².

4) Dintr-un turn de înălțime h_0 se aruncă o piatră pe verticală în sus cu viteza inițială v_0 . Înălțimea $h(t)$ la care ea ajunge la momentul t este dată de formula:

$$h(t) = h_0 + v_0 t - \frac{g}{2} t^2.$$

5) În mișcarea uniform accelerată spațiul $s(t)$ parcurs de un mobil în timpul t este dat de formula:

$$s(t) = \frac{a}{2} t^2,$$

unde a este accelerația mobilului.

§2. GRAFICUL FUNCȚIEI DE GRADUL AL DOILEA

Ne propunem să construim graficul funcției $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$.

Aceasta o facem cu scopul de a pune în evidență elementele principale ale graficului funcției de gradul al doilea și de a avea posibilitatea ca atunci când studiem funcția de gradul al doilea să interpretăm din punct de vedere geometric proprietățile obținute. Graficul funcției de gradul al doilea îl vom face în mai multe etape.

1. Graficul funcției $f(x) = x^2$

(Legea de asociere a acestei funcții se poate exprima foarte simplu și în cuvinte: „fiecărui număr real i se asociază pătratul său“.)

Trasarea graficului $f(x) = x^2$ se face prin „puncte“. Mai precis se asociază următorul tabel de valori funcției $f(x) = x^2$:

x	...	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	1/2	1	2	3	...
$f(x) = x^2$...	9	4	1	1/4	0	1/4	1	4	9	...

Reprezentăm într-un sistem de axe xOy punctele ale căror coordonate sînt valorile din tabel. Punctele obținute le unim printr-o linie continuă ca în figura IV.1.

(Facem observația că punctele reprezentate nu se unesc cu segmente ca în fig. IV.2.)

Curba obținută se numește *parabolă*. Pentru a obține o construcție cit mai exactă a acestei parabole, trebuie să reprezentăm cit mai multe puncte

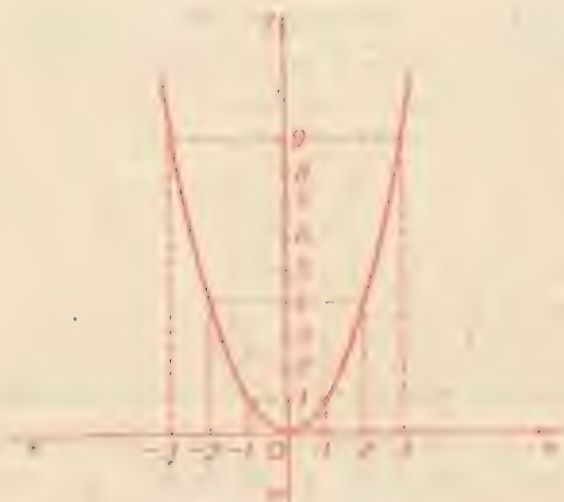


Fig. IV.1

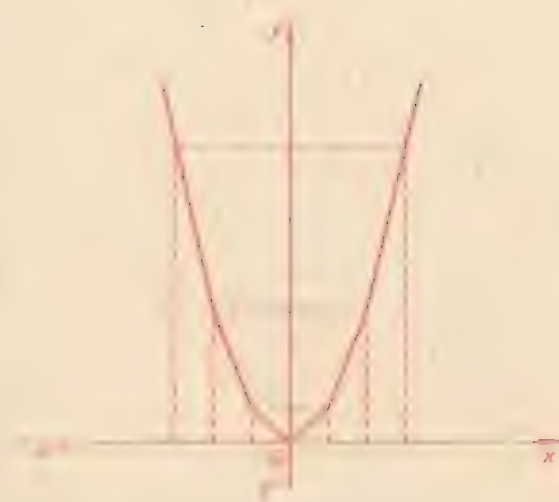


Fig. IV.2

ale graficului. Parabola funcției $f(x) = x^2$ are următoarele proprietăți importante:

1° ea se găsește deasupra axei $x'x$; trece prin originea axelor și, punctul O are cea mai mică ordonată (egală cu zero) dintre toate punctele de pe parabolă. Punctul O se numește *vrful parabolei*;

2° axa $y'y$ este axă de simetrie pentru parabolă. Într-adevăr, dacă $P(\alpha, \alpha^2)$ este un punct al graficului, cum $\alpha^2 = (-\alpha)^2$, atunci și $P'(-\alpha, \alpha^2)$ aparține graficului. Dar punctele P și P' sînt simetrice față de $y'y$.

1'. *Graficul funcției $f(x) = -x^2$*

(Legea de asociere a funcției f se poate exprima și în cuvinte: „fiecărui număr real i se asociază opusul pătratului său“.)

În figura IV.3 am reprezentat punctat graficul funcției $f_1(x) = x^2$. Graficul funcției $f(x) = -x^2$ se poate obține prin simetria față de axa $x'x$, a graficului funcției $f_1(x) = x^2$.

Într-adevăr dacă $P(\alpha, \alpha^2)$ este un punct al graficului funcției $f_1(x) = x^2$, atunci simetricul său față de axa $x'x$ este punctul $P'(\alpha, -\alpha^2)$. Cum $f(\alpha) = -\alpha^2$, atunci P' se găsește pe graficul funcției $f(x) = -x^2$.

Graficul funcției $f(x) = -x^2$ se numește, de asemenea, *parabolă*. Ea se găsește sub axa $x'x$. Axa $y'y$ este axă de simetrie, iar O are cea mai mare ordonată dintre toate punctele graficului $f(x) = -x^2$. Punctul O se numește, de asemenea, *vrful parabolei* funcției $f(x) = -x^2$.

În practică construcția graficului funcției $f(x) = -x^2$ se face tot prin „puncte“, ca la funcția $f_1(x) = x^2$.

2. *Graficul funcției $f(x) = ax^2$ ($a \neq 0$)*

Graficul acestei funcții se construiește ca și în cazul funcției $f_1(x) = x^2$ tot prin „puncte“.

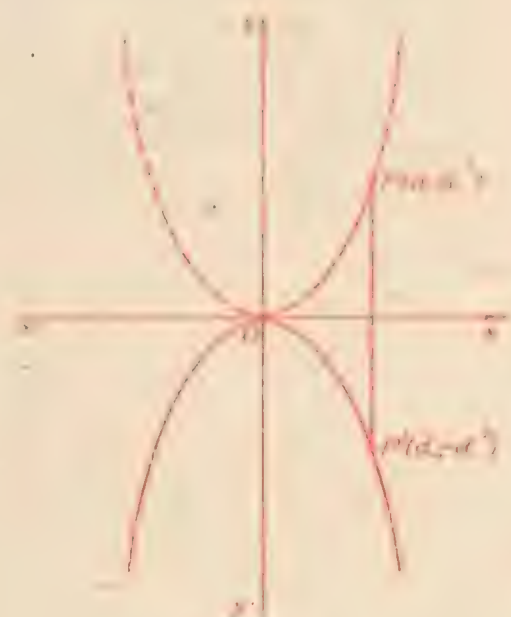


Fig. IV.3

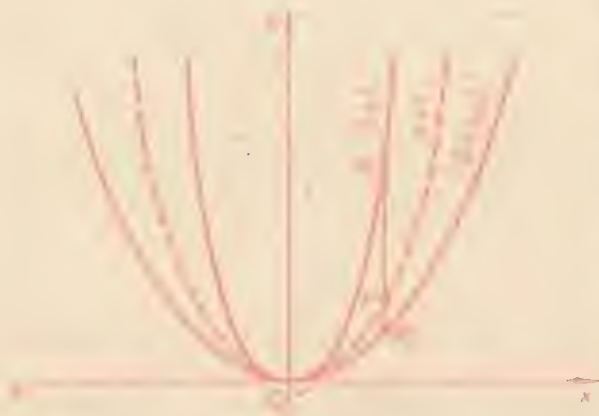


Fig. IV.4

Curba obținută se numește, de asemenea, parabolă. Să vedem care este poziția graficului funcției $f(x) = ax^2$ în raport cu graficele funcțiilor $f_1(x) = x^2$ și $f_2(x) = -x^2$. (Funcțiile $f_1(x) = x^2$ și $f_2(x) = -x^2$ sînt cazuri particulare ale funcției $f(x) = ax^2$, cînd $a = 1$ și respectiv $a = -1$.)

Cazul $a > 0$. În figura IV.4 am reprezentat punctat graficul funcției $f_1(x) = x^2$.

Fie $P(\alpha, \alpha^2)$ un punct de pe acest grafic.

Dacă $a > 1$, atunci punctul $P_1(\alpha, a\alpha^2)$ aparține graficului funcției $f(x) = ax^2$ și cum

$a\alpha^2 > \alpha^2$, atunci ramurile parabolei funcției $f(x) = ax^2$ se găsesc între ramurile parabolei $f_1(x) = x^2$.

Dacă $0 < a < 1$ atunci punctul $P_2(\alpha, a\alpha^2)$ aparține graficului funcției $f(x) = ax^2$ și cum $\alpha^2 > a\alpha^2$, atunci ramurile parabolei funcției $f(x) = ax^2$ se găsesc sub ramurile parabolei $f_1(x) = x^2$.

Cu cit a este mai mare ramurile parabolei $f(x) = ax^2$ se depărtează mai lent de axa $y'y$ care este axă de simetrie. Originea O are cea mai mică ordonată dintre toate punctele graficului funcției $f(x) = ax^2$. Acest punct se va numi, de asemenea, *vîrf*ul parabolei acestei funcții.

Cazul $a < 0$. Graficul funcției $f(x) = ax^2$ este simetricul față de axa $x'x$ al graficului funcției $f'(x) = -ax^2$, unde $-a > 0$. Diversele poziții ale graficului funcției $f(x) = ax^2$ se obțin din cazul precedent (fig. IV.5). Axa $y'y$ rămîne axă de simetrie, iar punctul O care are cea mai mare ordonată dintre toate punctele graficului funcției $f(x) = ax^2$ se va numi *vîrf*ul graficului.

3. Graficul funcției $f(x) = ax^2 + c$ ($a \neq 0$)

Vom considera funcția $g(x) = ax^2$. Fie $P(x_0, y_0)$ un punct al graficului funcției $f(x) = ax^2 + c$ (fig. IV. 6). Atunci

$$y_0 = ax_0^2 + c \text{ de unde } y_0 - c = ax_0^2 \text{ sau } y_0 - c = g(x_0).$$

Deci punctul $P'(x_0, y_0 - c)$ aparține graficului funcției $g(x) = ax^2$, reprezentat punctat în figura IV.6.



Fig. IV.5



Fig. IV.6

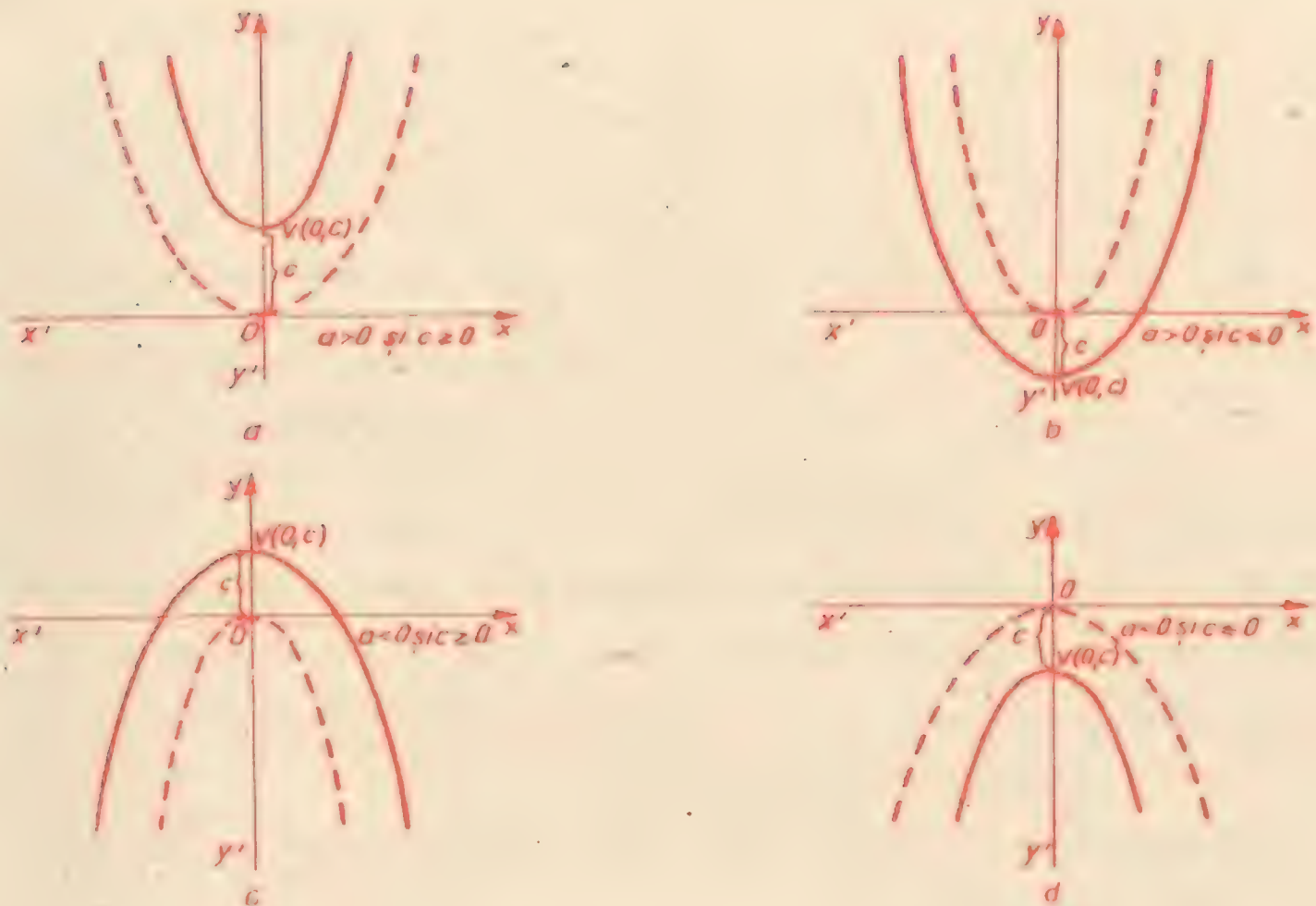


Fig. IV.7

Rezultă că graficul $f(x) = ax^2 + c$ se obține din graficul funcției $g(x) = ax^2$, printr-o translație de-a lungul axei $y'y$, cu o cantitate egală cu c (dacă $c > 0$, translația se face în sus, iar dacă $c < 0$, translația se face în jos).

Axa $y'y$ este axă de simetrie a graficului funcției $f(x) = ax^2 + c$. Graficul funcției $f(x) = ax^2 + c$ se numește *parabolă*, iar punctul $V(0, c)$ se numește *vîrf* al parabolei.

În figura IV.7 sînt date diferitele poziții ale graficului funcției $f(x) = ax^2 + c$ în raport cu valorile numerelor a și c .

4. Graficul funcției $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)

$ax^2 + bx + c$ se poate scrie sub forma:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a},$$

unde am notat cu $\Delta = b^2 - 4ac$ (Δ este discriminantul ecuației $ax^2 + bx + c = 0$). Este clar că pentru orice număr real $x \in \mathbb{R}$ avem

$$\boxed{f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a}} \quad (1)$$



Fig. IV.8

Egalitatea (1) se numește *forma canonică a funcției f*.

Trecem acum la construirea graficului funcției $f(x) = ax^2 + bx + c$. Considerăm funcția de gradul al doilea $g(x) = ax^2 + \frac{-\Delta}{4a}$.

În figura IV.8 am reprezentat punctat graficul funcției g , avînd pe $y'y$ ca axă de simetrie și cu vîrful în $V'\left(0, \frac{-\Delta}{4a}\right)$. Fie

$P(x_0, y_0)$ un punct pe graficul funcției $f(x) = ax^2 + bx + c$. Din egalitatea (1) se obține

$y_0 = f(x_0) = a\left(x_0 + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a}$ sau $y_0 = g\left(x_0 + \frac{b}{2a}\right)$. Rezultă că punctul $P'\left(x_0 + \frac{b}{2a}, y_0\right)$ aparține graficului funcției g . Se observă că P se obține

din P' făcînd o translație paralelă cu axa $x'x$ cu o cantitate egală cu $\frac{-b}{2a}$. Deci *graficul funcției $f(x) = ax^2 + bx + c$ se obține din graficul funcției $g(x) = ax^2 + \frac{-\Delta}{4a}$ printr-o translație paralelă cu axa $x'x$, cu o cantitate egală cu $\frac{-b}{2a}$ (dacă $\frac{-b}{2a} > 0$, translația se face spre dreapta, iar dacă $\frac{-b}{2a} < 0$, translația se face spre stînga)*.

Cum $y'y$ este axă de simetrie pentru graficul funcției g , atunci dreapta $x = \frac{-b}{2a}$ este axă de simetrie pentru graficul funcției $f(x) = ax^2 + bx + c$. Graficul funcției $f(x) = ax^2 + bx + c$ se numește *parabolă*, iar punctul $V\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$ se numește *vîrf* parabolei. Graficul funcției $f(x) = ax^2 + bx + c$ intersectează axa $y'y$ în punctul $A(0, f(0))$, unde $f(0) = c$.

Urmărind figura IV.9 obținem diferite poziții ale graficului funcției $f(x) = ax^2 + bx + c$ în raport de valorile lui a și Δ . În figura IV.9, punctat, am reprezentat graficul funcției $g(x) = ax^2 + \frac{-\Delta}{4a}$.

Exemplu. Să construim graficul funcției $f(x) = 2x^2 - 8x + 9$.

Cum $\Delta = b^2 - 4ac = 64 - 72 = -8$ și $\frac{b}{2a} = \frac{-8}{4} = -2$ rezultă că forma canonică a funcției este $f(x) = 2(x - 2)^2 + 1$.

Graficul funcției îl construim astfel:

1) Prin puncte construim graficul funcției $g(x) = 2x^2$.

2) Translatăm parabola funcției $g(x) = 2x^2$ de-a lungul axei $y'y$ cu cantitatea 1. Aceasta este graficul funcției $h(x) = 2x^2 + 1$ (a se vedea figura IV.10).

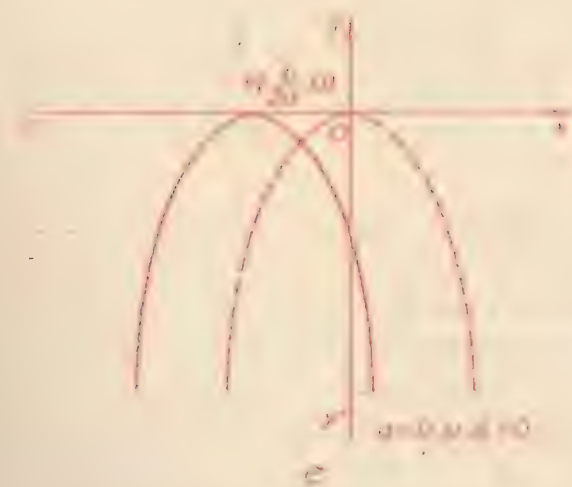
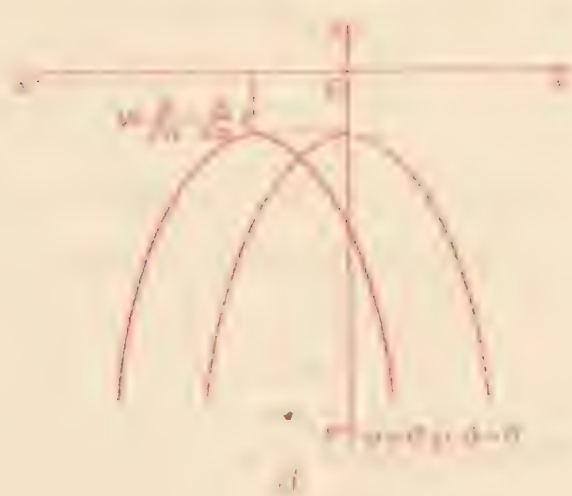


Fig. 1V.9

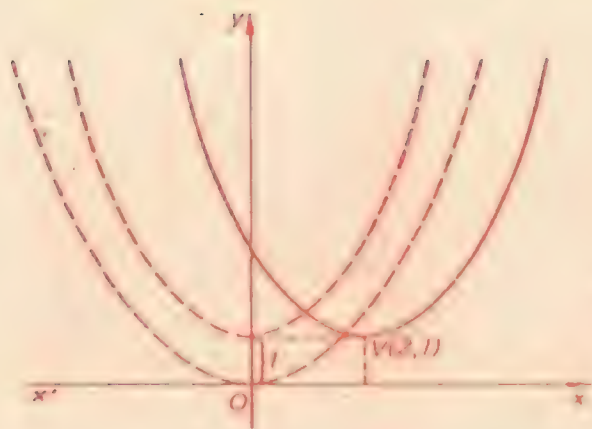


Fig. IV.10

3) Facem o translație paralelă cu axa $x'x$, cu cantitatea 2, a graficului funcției $h(x) = 2x^2 + 1$ și obținem graficul funcției $f(x) = 2x^2 - 8x + 9$. Vîrful acestui grafic este punctul $V(2, 1)$, iar axa sa de simetrie este dreapta $x = 2$ (a se vedea figura IV.10).

Interpretarea geometrică a rezolvării ecuației de gradul al doilea

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad (a \neq 0).$$

Din figura IV.9 rezultă următoarele:

1° Graficul funcției $f(x) = ax^2 + bx + c$ intersectează axa $x'x$ în două puncte distincte dacă și numai dacă $\Delta = b^2 - 4ac > 0$. Punctele de intersecție ale acestui grafic cu axa $x'x$ sînt punctele de coordonate $B_1(x_1, 0)$ și $B_2(x_2, 0)$, unde x_1 și x_2 sînt rădăcinile ecuației $ax^2 + bx + c = 0$. Reamintim că aceste rădăcini sînt date de formulele

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ și } x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Cum $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, atunci $\frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{b}{2a}$. Rezultă că axa de simetrie a graficului funcției $f(x) = ax^2 + bx + c$ trece prin punctul de coordonate $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, 0\right)$.

2° Graficul funcției $f(x) = ax^2 + bx + c$ intersectează axa $x'x$ într-un singur punct (spunem în acest caz că axa $x'x$ este tangentă la grafic) dacă și numai dacă $\Delta = b^2 - 4ac = 0$. Punctul de intersecție al graficului cu axa $x'x$ este $V\left(-\frac{b}{2a}, 0\right)$, care este și vîrfurile graficului. Ecuația $ax^2 + bx + c = 0$ are în acest caz două rădăcini reale egale:

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}.$$

3° Graficul funcției $f(x) = ax^2 + bx + c$ nu intersectează axa $x'x$ dacă și numai dacă $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, ceea ce este echivalent cu faptul că ecuația nu are nici o rădăcină reală.

§3. MAXIMUL SAU MINIMUL FUNCȚIEI DE GRADUL AL DOILEA

Considerăm funcția de gradul al doilea $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$. Am văzut că pentru orice $x \in \mathbb{R}$ avem $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a}$.

Cazul $a > 0$. Cum $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$, atunci și $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$, de unde prin adunarea cantității constante $\frac{-\Delta}{4a}$ obținem că $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a} \geq \frac{-\Delta}{4a}$.

Deci

$$f(x) \geq \frac{-\Delta}{4a}, \text{ oricare ar fi } x \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Cum egalitatea $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0$ are loc numai cînd $x = -\frac{b}{2a}$, atunci pentru $x = -\frac{b}{2a}$ avem $f\left(-\frac{b}{2a}\right) = \frac{-\Delta}{4a}$. Inegalitatea (1) arată că $f\left(-\frac{b}{2a}\right) = \frac{-\Delta}{4a}$ este cea mai mică dintre valorile funcției f . Numărul real $\frac{-\Delta}{4a}$ se numește *minimul funcției f* , iar valoarea $-\frac{b}{2a}$ este valoarea argumentului x în care se realizează acest minim.

Cazul $a < 0$. Cum $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$ și $a < 0$, rezultă $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \leq 0$, de unde prin adunarea cantității constante $\frac{-\Delta}{4a}$ obținem că $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a} \leq \frac{-\Delta}{4a}$. Deci putem scrie

$$f(x) \leq \frac{-\Delta}{4a}, \text{ oricare ar fi } x \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Am văzut mai înainte că $f\left(-\frac{b}{2a}\right) = \frac{-\Delta}{4a}$ care, împreună cu inegalitatea (2), arată că $f\left(-\frac{b}{2a}\right) = \frac{-\Delta}{4a}$ este cea mai mare dintre valorile funcției f . Cantitatea $\frac{-\Delta}{4a}$ se numește *maximul funcției f* , iar $-\frac{b}{2a}$ este valoarea argumentului x în care se realizează acest maxim.

Concluzii. 1) Dacă $a > 0$, funcția $f(x) = ax^2 + bx + c$ are un minim egal cu $\frac{-\Delta}{4a}$, minim ce se realizează pentru $x = -\frac{b}{2a}$.

2) Dacă $a < 0$, funcția $f(x) = ax^2 + bx + c$ are un maxim egal cu $\frac{-\Delta}{4a}$, maxim ce se realizează pentru $x = -\frac{b}{2a}$.

Interpretarea geometrică

În cazul $a > 0$, parabola funcției $f(x) = ax^2 + bx + c$ are ramurile îndreptate în sus (spre y pozitiv). În acest caz minimul funcției este egal cu ordonata vîrfului graficului, iar valoarea lui x în care se realizează acest minim este abscisa vîrfului graficului (fig. IV.11).

În cazul $a < 0$, parabola are ramurile îndreptate în jos (spre y negativ). În acest caz maximul funcției este, de asemenea, egal cu ordonata vîrfului graficului, iar valoarea lui x unde se realizează acest maxim este, de asemenea, egală cu abscisa vîrfului graficului (fig. IV.12).

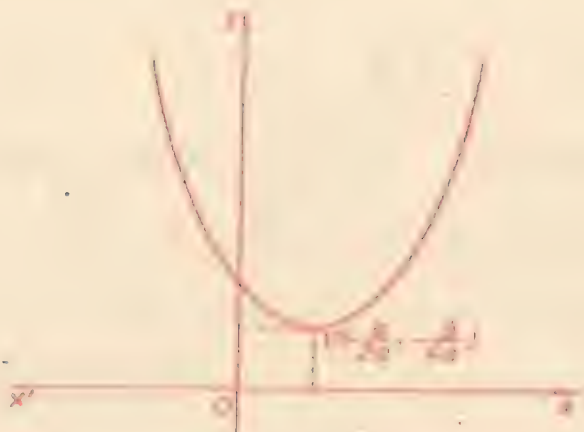


Fig. IV.11



Fig. IV.12

Exemple. 1) Fie funcția $f(x) = x^2 - 4x + 1$. Cum $a = 1 > 0$, această funcție are un minim egal cu $\frac{-\Delta}{4a} = -\frac{16 - 4}{4} = -3$. Acest minim se realizează pentru $x = \frac{-b}{2a} = \frac{4}{2} = 2$.

2) Fie funcția $f(x) = -2x^2 + 2x + 1$. Cum $a = -2 < 0$, funcția f are un maxim egal cu $\frac{-\Delta}{4a} = -\frac{4 - 8}{-8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$. Acest maxim se realizează pentru $x = \frac{-b}{2a} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$.

§4. INTERVALE DE MONOTONIE PENTRU FUNCȚIA DE GRADUL AL DOILEA

Definiție. Fie $f : A \rightarrow B$ o funcție numerică (adică A și B sînt submulțimi ale lui \mathbb{R}). Spunem că f este *crescătoare* pe o mulțime $I \subset A$, dacă oricare ar fi $x_1, x_2 \in I$, astfel încît $x_1 \leq x_2$, avem $f(x_1) \leq f(x_2)$.

Funcția f se zice *descrescătoare* pe mulțimea $I \subset A$, dacă oricare ar fi $x_1, x_2 \in I$, astfel încît $x_1 \leq x_2$, avem $f(x_1) \geq f(x_2)$.

Vom spune că f este *strict crescătoare* (respectiv *strict descrescătoare*) pe mulțimea I dacă oricare ar fi $x_1, x_2 \in I$, astfel încît $x_1 < x_2$, să rezulte $f(x_1) < f(x_2)$ (respectiv oricare ar fi $x_1, x_2 \in I$, cu $x_1 < x_2$, să rezulte $f(x_1) > f(x_2)$). O funcție numerică $f : A \rightarrow B$ crescătoare sau descrescătoare pe o submulțime $I \subset A$ se zice *monotonă* pe I .

Exemplu. Funcția de gradul întâi $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = mx + n$ ($m \neq 0$) este strict crescătoare dacă $m > 0$ și strict descrescătoare dacă $m < 0$. Într-adevăr fie $x_1 < x_2$. Dacă $m > 0$, atunci $mx_1 < mx_2$ și deci și $mx_1 + n < mx_2 + n$ ceea ce înseamnă că $f(x_1) < f(x_2)$.

Dacă $m < 0$, atunci din inegalitatea $x_1 < x_2$ obținem $mx_1 > mx_2$ de unde $mx_1 + n > mx_2 + n$, ceea ce înseamnă că $f(x_1) > f(x_2)$.

Relativ la funcția de gradul al doilea, vom démonstra:

Teorema. Fie funcția de gradul al doilea $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$

1° Dacă $a > 0$, funcția f este strict descrescătoare pe intervalul $\left(-\infty, \frac{-b}{2a}\right]$ și strict crescătoare pe intervalul $\left[\frac{-b}{2a}, +\infty\right)$.

2° Dacă $a < 0$, funcția f este strict crescătoare pe intervalul $\left(-\infty, \frac{-b}{2a}\right]$ și strict descrescătoare pe intervalul $\left[\frac{-b}{2a}, +\infty\right)$.
(Intervalele $\left(-\infty, \frac{-b}{2a}\right]$ și $\left[\frac{-b}{2a}, +\infty\right)$ se numesc *intervale de monotonie ale funcției f* .)

Demonstrație 1° Vom presupune că $a > 0$. Pornim tot de la forma canonică a funcției f , $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a}$. Fie x_1, x_2 două numere reale care se găsesc în intervalul $\left(-\infty, \frac{-b}{2a}\right]$, astfel încît $x_1 < x_2$. Deci putem scrie

$$x_1 < x_2 \leq \frac{-b}{2a}$$

de unde prin adunarea cantității $\frac{b}{2a}$, obținem:

$$x_1 + \frac{b}{2a} < x_2 + \frac{b}{2a} \leq 0.$$

Prin ridicare la pătrat se deduce că

$$\left(x_1 + \frac{b}{2a}\right)^2 > \left(x_2 + \frac{b}{2a}\right)^2.$$

Prin înmulțire cu numărul pozitiv a , obținem:

$$a\left(x_1 + \frac{b}{2a}\right)^2 > a\left(x_2 + \frac{b}{2a}\right)^2.$$

Adunînd cantitatea $\frac{-\Delta}{4a}$ obținem:

$$a\left(x_1 + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a} > a\left(x_2 + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a}$$

sau, altfel scris: $f(x_1) > f(x_2)$, ceea ce ne arată că funcția f este strict descrescătoare pe intervalul $\left(-\infty, \frac{-b}{2a}\right]$. Presupunem acum că numerele x_1, x_2 se găsesc în intervalul $\left[\frac{-b}{2a}, +\infty\right)$, astfel încît $x_1 < x_2$. Deci putem scrie

$$\frac{-b}{2a} \leq x_1 < x_2$$

de unde prin adunarea cantității $\frac{b}{2a}$, obținem:

$$0 \leq x_1 + \frac{b}{2a} < x_2 + \frac{b}{2a}.$$

Prin ridicare la pătrat obținem:

$$\left(x_1 + \frac{b}{2a}\right)^2 < \left(x_2 + \frac{b}{2a}\right)^2.$$

Prin înmulțire cu $a > 0$ și adunarea cantității $\frac{-\Delta}{4a}$ obținem:

$$a\left(x_1 + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a} < a\left(x_2 + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a}$$

sau $f(x_1) < f(x_2)$, ceea ce înseamnă că f este strict crescătoare pe intervalul $\left[\frac{-b}{2a}, +\infty\right)$.

2° Presupunem că $a < 0$. Fie x_1, x_2 numere reale din intervalul $\left(-\infty, \frac{-b}{2a}\right]$ astfel încît $x_1 < x_2$.

Am văzut la pct. 1° că

$$\left(x_1 + \frac{b}{2a}\right)^2 > \left(x_2 + \frac{b}{2a}\right)^2$$

care, prin înmulțirea cu numărul a negativ, ne conduce la inegalitatea

$$a\left(x_1 + \frac{b}{2a}\right)^2 < a\left(x_2 + \frac{b}{2a}\right)^2.$$

Adunînd cantitatea $\frac{-\Delta}{4a}$ obținem:

$$a\left(x_1 + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a} < a\left(x_2 + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a}$$

sau altfel scris: $f(x_1) < f(x_2)$, ceea ce ne arată că funcția f este strict crescătoare pe intervalul $\left(-\infty, \frac{-b}{2a}\right]$.

Presupunem acum că numerele x_1, x_2 sînt în intervalul $\left[\frac{-b}{2a}, +\infty\right)$ așa încît $x_1 < x_2$. Am văzut la pct. 1° că avem

$$\left(x_1 + \frac{b}{2a}\right)^2 < \left(x_2 + \frac{b}{2a}\right)^2,$$

din care, prin înmulțire cu numărul negativ a , se obține:

$$a\left(x_1 + \frac{b}{2a}\right)^2 > a\left(x_2 + \frac{b}{2a}\right)^2.$$

Adunînd cantitatea $\frac{-\Delta}{4a}$ rezultă:

$$a\left(x_1 + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a} > a\left(x_2 + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a} \text{ sau } f(x_1) > f(x_2).$$

Deci, f este strict descrescătoare pe intervalul $\left[\frac{-b}{2a}, +\infty\right)$. Este foarte sugestiv a se transpune afirmațiile 1° și 2° din teorema de mai sus în următoarele tabele:

$a > 0$	x	$-\infty$	$\frac{-b}{2a}$	$+\infty$
	$f(x)$		$\frac{-\Delta}{4a}$ minim	
			↘ ↗	
$a < 0$	x	$-\infty$	$\frac{-b}{2a}$	$+\infty$
	$f(x)$		$\frac{-\Delta}{4a}$ maxim	
			↗ ↘	

În ambele tabele, înclinația săgeților indică intervalul pe care funcția este strict descrescătoare sau strict crescătoare.

Interpretare geometrică

Cazul $a > 0$. Parabola funcției $f(x) = ax^2 + bx + c$ are ramurile în sus (fig. IV.13). Fie $P(x_0, y_0)$ un punct arbitrar pe parabolă avînd proiecția pe axa $x'x$ în Q . Cînd Q se apropie de la stînga la dreapta de punctul $A\left(\frac{-b}{2a}, 0\right)$, atunci punctul P coboară. Cînd punctul Q se îndepărtează de punctul A spre dreapta, punctul P urcă pe ramura din dreapta a parabolei.

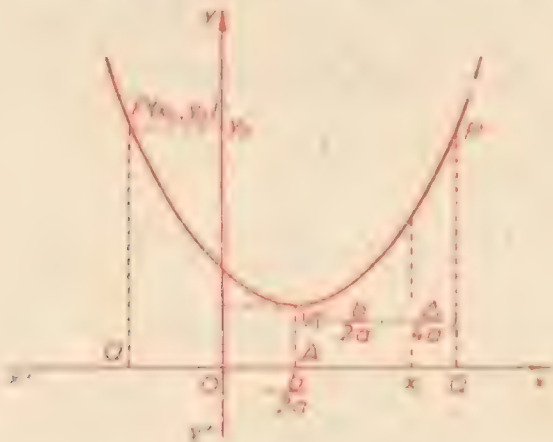


Fig. IV.13

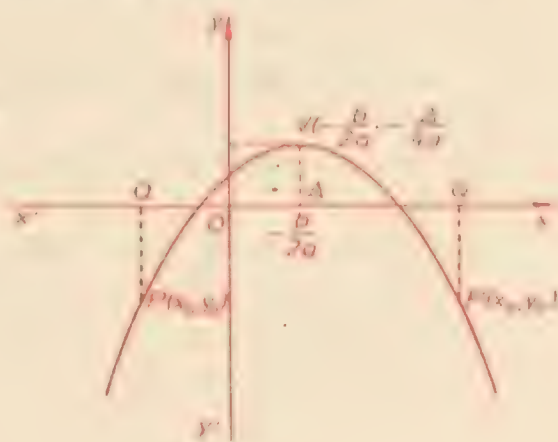


Fig. IV.14

Cazul $a < 0$. Parabola funcției $f(x) = ax^2 + bx + c$ are ramurile în jos (fig. IV.14). Cînd Q se apropie de punctul A de la stînga la dreapta, punctul P urcă pe ramura din stînga a parabolei, iar cînd Q se îndepărtează de A spre dreapta, punctul P coboară pe ramura din dreapta a parabolei.

Exemple. 1) Fie funcția $f(x) = 2x^2 - x + 1$. Cum $a = 2$ și $\frac{-b}{2a} = \frac{1}{4}$, funcția este strict descrescătoare pe intervalul $(-\infty, \frac{1}{4}]$ și strict crescătoare pe intervalul $[\frac{1}{4}, +\infty)$. Tabelul asociat este următorul:

x	$-\infty$	$\frac{1}{4}$	$+\infty$
$f(x) = 2x^2 - x + 1$		$\frac{7}{8}$ minim	

2) Fie funcția $f(x) = -x^2 + 2$. Cum $a = -1 < 0$ și $\frac{-b}{2a} = 0$, funcția este strict crescătoare pe intervalul $(-\infty, 0]$ și strict descrescătoare pe intervalul $[0, +\infty)$. Tabelul asociat este următorul:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x) = -x^2 + 2$		2 maxim	

5. TABELUL DE VARIAȚIE ȘI TRASAREA GRAFICULUI FUNCȚIEI DE GRADUL AL DOILEA.

Am văzut că graficul funcției $f(x) = ax^2 + bx + c$ se poate construi în mai multe etape pornind de la funcții simple al căror grafic îl construim prin „puncte” și apoi se fac una sau două translații. Dar în practică se construiește graficul prin „puncte”, adică se reprezintă un număr cât mai mare de puncte ale graficului care apoi se unesc între ele cu linii continue, iar figura geometrică ce se obține constituie o reprezentare aproximativă a parabolei funcției f . Pentru a obține o reprezentare cât mai bună a graficului funcției date, alegerea punctelor care se reprezintă nu se face la întâmplare. Se procedează astfel:

Se face un tabel numit tabelul de variație al funcției f în care se trec următoarele date:

1) Valoarea $x=0$ și valoarea $f(0)$. Punctul $A(0, f(0))$ reprezintă intersecția graficului cu axa $y'y$.

2) Rădăcinile x_1, x_2 ale ecuației $ax^2 + bx + c = 0$ când acestea există. Punctele $B_1(x_1, 0)$ și $B_2(x_2, 0)$ reprezintă intersecția graficului cu axa $x'x$.

3) Valoarea $x = \frac{-b}{2a}$ și valoarea $f\left(\frac{-b}{2a}\right) = \frac{-\Delta}{4a}$. Punctul $V\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$ reprezintă virful graficului. În tabel se mai specifică dacă $\frac{-\Delta}{4a}$ este un minim sau un maxim. (La trasarea graficului se are în vedere că dreapta $x = \frac{-b}{2a}$ este axă de simetrie.)

4) Se indică prin săgeți intervalele de monotonie ale funcției.

5) Pentru a obține o reprezentare cât mai exactă a graficului, în tabel se trec eventual și alte valori ale lui x , precum și valorile corespunzătoare $f(x)$.

Exemplu. Să se reprezinte graficul funcției $f(x) = x^2 + 2x - 3$

Tabelul de variație al funcției este:

x	$-\infty$	-3	-1	0	1	$+\infty$
$f(x) = x^2 + 2x - 3$		\searrow 0	\searrow -4 minim	\nearrow -3	\nearrow 0	\nearrow

Punctul $A(0, -3)$ este la intersecția graficului cu axa $y'y$.

Punctele $B_1(-3, 0)$ și $B_2(1, 0)$ sînt intersecțiile graficului cu axa $x'x$, iar $V(-1, -4)$ este virful parabolei. Graficul funcției $f(x) = x^2 + 2x - 3$ este redat în figura IV.15.



Fig. IV.15

§6. SEMNUL FUNCȚIEI DE GRADUL AL DOILEA

A studia semnul funcției de gradul al doilea $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, înseamnă a determina valorile lui x pentru care $f(x)$ este un număr pozitiv și valorile lui x pentru care $f(x)$ este negativ. În studiul semnului funcției $f(x) = ax^2 + bx + c$, un rol important îl joacă discriminantul $\Delta = b^2 - 4ac$. Vom avea următoarele cazuri:

1. *Cazul* $\Delta < 0$. Folosim forma canonică a funcției f ; $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a}$. Cum $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ este pătrat perfect atunci $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$. Dacă $a > 0$, atunci $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$ și $\frac{-\Delta}{4a} > 0$ care, adunate, dau

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a} > 0.$$

Deci, în acest caz, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, avem $f(x) > 0$. Dacă $a < 0$, atunci

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \leq 0 \text{ și } \frac{-\Delta}{4a} < 0$$

care, adunate, ne dau:

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a} < 0.$$

Deci, în acest caz, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, $f(x) < 0$.

Putem enunța regula:

Dacă $\Delta < 0$, atunci $f(x)$ are același semn ca al lui a , oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

Acest rezultat se trece într-un tabel în felul următor:

$$\Delta < 0 \quad \frac{x}{f(x)} \quad \left| \begin{array}{ccc} -\infty & & +\infty \\ \text{semnul lui } a & & \end{array} \right.$$

Grafic tabelul este transpus în figura IV.16.



Fig. IV.16

2. *Cazul* $\Delta = 0$. În acest caz, pentru orice $x \in \mathbb{R}$ avem $f(x) = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2$. Dacă $x \neq -\frac{b}{2a}$, atunci $\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 \neq 0$ și deci $\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 > 0$. Rezultă că pentru orice $x \neq -\frac{b}{2a}$ semnul lui $f(x)$ este același cu al lui a .

Dacă $x = -\frac{b}{2a}$, atunci $f(x) = 0$. Putem enunța regula:

Dacă $\Delta = 0$, *atunci* $f(x)$ *are același semn cu al lui* a , *oricare ar fi* $x \in \mathbb{R}$, *cu excepția lui* $x = -\frac{b}{2a}$, *unde* f *ia valoarea zero*. Acest rezultat se trece în tabelul următor:

$$\Delta = 0 \quad \frac{x}{f(x)} \quad \left| \begin{array}{ccc} -\infty & -\frac{b}{2a} & +\infty \\ \text{semnul lui } a & 0 & \text{semnul lui } a \end{array} \right.$$

Grafic tabelul este transpus în figura IV.17.

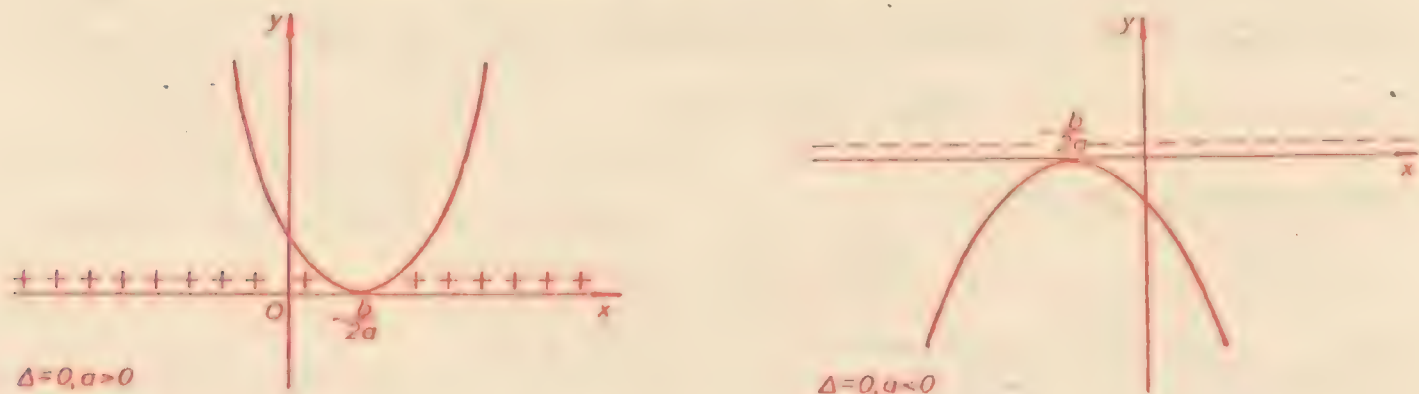


Fig. IV.17

3. *Cazul $\Delta > 0$.* În acest caz ecuația $ax^2 + bx + c = 0$ are două rădăcini reale x_1 și x_2 , distincte. Mai mult, trinomialul $aX^2 + bX + c$ se descompune în factori de gradul întâi:

$$aX^2 + bX + c = a(X - x_1)(X - x_2).$$

Deci, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, avem $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$. Cum $x_1 \neq x_2$ putem presupune că $x_1 < x_2$. Dacă numărul real x nu aparține intervalului $[x_1, x_2]$, atunci $x < x_1$ sau $x_2 < x$. Presupunem că $x < x_1$, atunci și $x < x_2$. Deci $x - x_1 < 0$ și $x - x_2 < 0$ de unde rezultă că $(x - x_1)(x - x_2) > 0$.

În situația $x_2 < x$ avem $x_1 < x$ și deci $x - x_1 > 0$ și $x - x_2 > 0$, de unde rezultă că $(x - x_1)(x - x_2) > 0$.

Deci, cînd x nu aparține intervalului $[x_1, x_2]$, obținem $(x - x_1)(x - x_2) > 0$ și deci semnul lui $f(x)$ este același cu semnul lui a .

Dacă x se găsește între rădăcini, adică $x_1 < x < x_2$, atunci $(x - x_1)(x - x_2) < 0$ și deci semnul lui $f(x)$ este contrar semnelui lui a .

Cînd $x = x_1$ sau $x = x_2$, $f(x) = 0$.

Putem enunța regula:

Dacă $\Delta > 0$, atunci $f(x)$ are semnul lui a în afara rădăcinilor și are semn contrar lui a în intervalul dintre rădăcini, cu excepția lui $x = x_1$ și $x = x_2$, unde f ia valoarea zero. (x_1, x_2 sînt rădăcinile ecuației $ax^2 + bx + c = 0$.) Acest rezultat se reprezintă în tabelul următor:

$\Delta > 0$	x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
	$f(x)$	semnul lui a 0 semn contrar lui a 0 semnul lui a			

Grafic tabelul este transpus în figura IV.18.

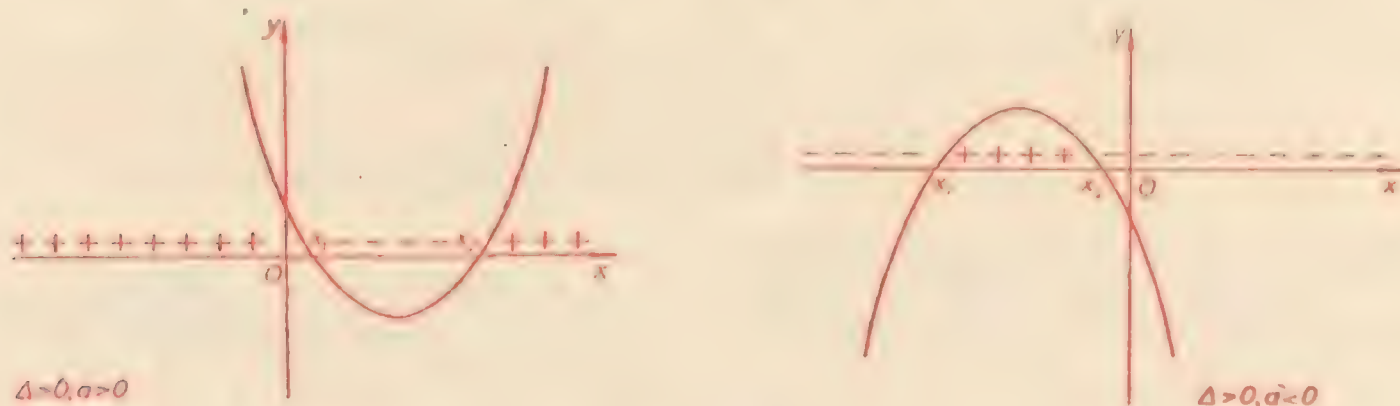


Fig. IV.18

Exemple. 1) Fie funcția $f(x) = x^2 + 2x + 3$. Cum $\Delta = 4 - 12 = -8 < 0$, ne găsim în primul caz. Cum $a = 1 > 0$, tabelul semnelui funcției este următorul:

x	$-\infty$									$+\infty$
$f(x) = x^2 + 2x + 3$	+ + + + + + + + + +									

2) Fie funcția $f(x) = -x^2 - 2x - 1$. Cum $\Delta = 4 - 4 = 0$ și $a = -1$, tabelul cu semnul funcției f este următorul:

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a} = -1$		$+\infty$
$f(x) = -x^2 - 2x - 1$		-	-	0	-

3) Fie funcția $f(x) = x^2 - 3x + 2$. Cum $\Delta = 9 - 8 = 1 > 0$, atunci ecuația $x^2 - 3x + 2 = 0$ are rădăcini reale și distincte. Acestea sînt $x_1 = 1$ și $x_2 = 2$. Tabelul semnelui funcției este următorul:

x	$-\infty$	1				2				$+\infty$						
$f(x) = x^2 - 3x + 2$		+	+	+	+	0	-	-	-	0	+	+	+	+	+	+

57. APLICAȚII ALE SEMNULUI FUNCȚIEI DE GRADUL AL DOILEA

1. Inecuații de gradul al doilea

Inecuațiile de forma

$$ax^2 + bx + c > 0, \quad ax^2 + bx + c \geq 0, \quad ax^2 + bx + c < 0 \quad \text{și}$$

$ax^2 + bx + c \leq 0$, unde a, b, c sînt numere reale date, $a \neq 0$, se numesc *inecuații de gradul al doilea*.

Observație. În practică vom considera orice inecuație care se reduce, folosind proprietățile inegalităților, la o inecuație de gradul al doilea.

Rezolvarea inecuațiilor de gradul al doilea este o consecință imediată a studiului semnelui funcției $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Exemple. 1) Să se rezolve inecuația $x^2 - 3x + 2 > 0$. Se vede că $\Delta = 9 - 8 = 1 > 0$. Rădăcinile ecuației $x^2 - 3x + 2 = 0$, sînt $x_1 = 1$ și $x_2 = 2$. Tabelul semnelui funcției $f(x) = x^2 - 3x + 2$ este următorul:

x	$-\infty$	1				2				$+\infty$					
$f(x)$		+	+	+	+	0	-	-	-	-	0	+	+	+	+

Din acest tabel rezultă că mulțimea soluțiilor inecuației date este $(-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$.

2) Să se rezolve inecuația $2x^2 + x \leq 1$. Această inecuație este echivalentă cu inecuația $2x^2 + x - 1 \leq 0$. Se vede că $\Delta = 1 + 8 = 9 > 0$ și rădăcinile ecuației $2x^2 + x - 1 = 0$ sînt $x_1 = -1$ și $x_2 = \frac{1}{2}$. Tabelul semnelui funcției $f(x) = 2x^2 + x - 1$ este următorul:

x	$-\infty$				-1				$\frac{1}{2}$					$+\infty$
$f(x)$		+	+	+	0	-	-	-	0	+	+	+	+	+

Mulțimea soluțiilor inecuației date este $\left[-1, \frac{1}{2}\right]$.

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		+ + + + + + + + +	

4) Să se rezolve inecuația $(x-1)^2 > 2x-3$. Această inecuație este echivalentă cu inecuația $x^2 - 2x + 1 > 2x - 3$ care este echivalentă la rîndul său cu inecuația $x^2 - 4x + 4 > 0$. Avem $\Delta = 16 - 16 = 0$. Rădăcinile ecuației $x^2 - 4x + 4 = 0$, sînt $x_1 = x_2 = 2$. Tabelul semnelui funcției $f(x) = x^2 - 4x + 4$ este următorul

x	$-\infty$				2			$+\infty$
$f(x)$		+	+	+	0	+	+	+

$$(S) \begin{cases} x + 5 \geq 4x + 3, \\ 2x + 1 > 3x - 1, \\ x^2 + 2x - 3 \geq 0. \end{cases}$$
$$\begin{cases} -3x + 2 \geq 0, \\ -x + 2 > 0, \\ x^2 + 2x - 3 \geq 0. \end{cases}$$
$$(S) \begin{cases} x^2 + 2x + 3 > 0, \\ x^2 - 2x - 3 \geq 0, \\ 2x + 1 < 2 - x. \end{cases}$$
$$\begin{cases} x^2 + 2x + 3 > 0, \\ x^2 - 2x - 3 \geq 0, \\ 3x - 1 < 0. \end{cases}$$

Mulțimea soluțiilor inecuației $x^2 + 2x + 3 > 0$, este $M_1 = \mathbb{R}$.

Mulțimea soluțiilor inecuației $x^2 - 2x - 3 \geq 0$ este $M_2 = (-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$.

Mulțimea soluțiilor inecuației $3x - 1 < 0$ este $M_3 = \left(-\infty, \frac{1}{3}\right)$.

Atunci, mulțimea soluțiilor sistemului (S) este $M = M_1 \cap M_2 \cap M_3 = (-\infty, -1]$.

3. Semnul expresiei $E = \frac{a_1x^2 + b_1x + c_1}{a_2x^2 + b_2x + c_2}$ unde $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ sînt numere reale date.

A determina semnul expresiei E , revine la a determina pentru ce valori reale ale lui x expresia este pozitivă și pentru ce valori reale ale lui x expresia este negativă.

Se știe că: 1° o fracție este pozitivă dacă și numai dacă numărătorul și numitorul au același semn și 2° ea este negativă dacă numărătorul și numitorul sînt de semne contrarii.

Rezultă că pentru a determina semnul expresiei E , vom determina semnele funcțiilor $f_1(x) = a_1x^2 + b_1x + c_1$ și $f_2(x) = a_2x^2 + b_2x + c_2$, care se trec într-un tabel. Ținînd cont de 1° și 2° se obține semnul expresiei E .

Exemplu. Să se determine semnul expresiei $E = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 1}$. Considerăm funcțiile $f_1(x) = x^2 - 5x + 6$ și $f_2(x) = x - 1$. Rădăcinile ecuației $x^2 - 5x + 6 = 0$ sînt $x_1 = 2$ și $x_2 = 3$, iar rădăcina ecuației $x - 1 = 0$ este 1. Facem următorul tabel cu semnele funcțiilor f_1 și f_2 :

x	$-\infty$					1					2					3.					$+\infty$
$f_1(x)$		+	+	+	+	+	+	+		0	-	-	-		0	+	+	+	+	+	
$f_2(x)$		-	-	-	-	0	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	
E		-	-	-	-		+	+	+	0	-	-	-		0	+	+	+	+	+	

Din tabel rezultă că expresia E este pozitivă pentru $x \in (1, 2) \cup (3, +\infty)$, negativă pentru $x \in (-\infty, 1) \cup (2, 3)$ și este egală cu zero pentru $x = 2$ și $x = 3$. Expresia E nu are sens pentru $x = 1$.

Studiul semnelor expresiei de forma $E = \frac{a_1x^2 + b_1x + c_1}{a_2x^2 + b_2x + c_2}$ ne ajută la rezolvarea inecuațiilor de forma $E > 0$, $E \geq 0$, $E < 0$ și $E \leq 0$.

Exemple. 1) Să se rezolve inecuația

$$\frac{x^2 - 1}{x^2 - 4} > -1.$$

Inecuația dată este echivalentă cu inecuația $\frac{x^2 - 1}{x^2 - 4} + 1 > 0^*$, care este echivalentă cu inecuația $\frac{2x^2 - 5}{x^2 - 4} > 0$. Vom determina semnul expresiei $E = \frac{2x^2 - 5}{x^2 - 4}$.

* Este greșit de scris $x^2 - 1 > -1(x^2 - 4)$, deoarece $x^2 - 4$ poate fi pozitiv sau negativ.

Facem tabelul

x	$-\infty$	-2			$-\sqrt{\frac{5}{2}}$			$\sqrt{\frac{5}{2}}$			2			$+\infty$						
$2x^2 - 5$		+	+	+	+	+		+	+	0	-	-	-	0	+	+	+	+	+	+
$x^2 - 4$		+	+	+		0	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0	+	+	
E		+	+	+			-	-	-	0	+	+	+	0	-	-	-		+	+

Din acest tabel rezultă că mulțimea soluțiilor inecuației date este $(-\infty, -2) \cup \left(-\sqrt{\frac{5}{2}}, \sqrt{\frac{5}{2}}\right) \cup (2, +\infty)$.

2) Să se rezolve inecuația

$$\frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1} \leq 1.$$

Această inecuație este echivalentă cu inecuația $\frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1} - 1 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{-2x}{x^2 + x + 1} \leq 0$.

Determinăm semnul expresiei $E = \frac{-2x}{x^2 + x + 1}$. Facem tabelul:

x	$-\infty$					0						$+\infty$
$-2x$		+	+	+	+	0	-	-	-	-	-	-
$x^2 + x + 1$		+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
E		+	+	+	+	0	-	-	-	-	-	-

Din acest tabel rezultă că mulțimea soluțiilor inecuației date este $[0, +\infty)$.

4. Inecuații cu modul

1) Să se rezolve inecuația: $|x^2 - x - 2| \leq 1$.

Rezolvarea acestei inecuații este echivalentă cu rezolvarea inecuației

$$-1 \leq x^2 - x - 2 \leq 1,$$

care la rândul său este echivalentă cu rezolvarea sistemului de inecuații

$$\begin{cases} x^2 - x - 2 \leq 1 \\ x^2 - x - 2 \geq -1. \end{cases}$$

Mulțimea soluțiilor inecuației $x^2 - x - 2 \leq 1$ este $M_1 = \left[\frac{1 - \sqrt{13}}{2}, \frac{1 + \sqrt{13}}{2}\right]$.

Mulțimea soluțiilor inecuației $x^2 - x - 2 \geq -1$ este

$$M_2 = \left(-\infty, \frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right] \cup \left[\frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \infty\right).$$

Mulțimea soluțiilor inecuației date este

$$M = M_1 \cap M_2 = \left[\frac{1 - \sqrt{13}}{2}, \frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right] \cup \left[\frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \frac{1 + \sqrt{13}}{2}\right].$$

2) Să se rezolve inecuația $|x^2 - 3x + 2| \leq x + 7$.

Ecuția $x^2 - 3x + 2 = 0$ are rădăcinile $x_1 = 1$ și $x_2 = 2$.

Rezultă că pentru $x \in [1, 2]$ avem $x^2 - 3x + 2 \leq 0$ și pentru $x \in (-\infty; 1] \cup [2, \infty)$ avem $x^2 - 3x + 2 \geq 0$.

1° Considerăm cazul cînd $x \in (-\infty, 1] \cup [2, \infty)$. Inecuația dată se scrie în acest caz, astfel:

$$x^2 - 3x + 2 \leq x + 7$$

care are soluții, mulțimea $M_1 = [-1, 5]$.

Rezultă că pentru $x \in [-1, 1] \cup [2, 5]$ inecuația $|x^2 - 3x - 2| \leq x + 7$ este verificată.

2° Considerăm cazul cînd $x \in (1, 2)$. În acest caz inecuația dată se scrie, astfel:

$$-(x^2 - 3x + 2) \leq x + 7.$$

care este echivalentă cu inecuația:

$$x^2 - 2x + 9 \geq 0.$$

Acastă inecuație are ca soluții mulțimea $M_2 = \mathbb{R}$.

Rezultă că pentru $x \in (1, 2)$ inecuația $|x^2 - 3x - 2| \leq x + 7$ este verificată.

În concluzie mulțimea soluțiilor inecuației date este:

$$M = [-1, 1] \cup [2, 5] \cup (1, 2) = [-1, 5].$$

§8. APLICAȚII PRACTICE ALE STUDIULUI FUNCȚIEI DE GRADUL AL DOILEA

Așa cum am spus și în § 1, există numeroase exemple practice care au impus studiul funcției de gradul al doilea. În continuare vom prezenta câteva dintre ele.

1) Dintr-un turn de înălțime h_0 se aruncă o piatră pe verticală în sus cu viteza inițială v_0 . Să se afle:

i) la ce înălțime maximă ajunge piatra;

ii) după cît timp piatra ajunge pe pămînt.

Caz numeric: $h_0 = 30$ m, $v_0 = 20$ m/s.

Soluție i) Înălțimea $h(t)$ la care ajunge piatra la momentul t este dată de formula:

$$h(t) = h_0 + v_0 t - \frac{g}{2} t^2, \text{ unde } g = 9,8 \text{ m/s}^2.$$

Pentru a calcula înălțimea maximă h_{\max} la care ajunge piatra determinăm maximul funcției $h(t)$ care este

$$h_{\max} = h_0 + \frac{v_0^2}{2g}.$$

ii) Pentru a determina după cît timp piatra ajunge pe pămînt trebuie să determinăm pe t astfel încît $h(t) = 0$. Deci avem de determinat rădăcinile ecuației:

$$h_0 + v_0 t - \frac{g}{2} t^2 = 0.$$

Rezolvând această ecuație găsim soluțiile :

$$t_{1,2} = \frac{v_0 \pm \sqrt{v_0^2 + 2gh_0}}{g}.$$

Deoarece $v_0 < \sqrt{v_0^2 + 2gh_0}$, atunci timpul după care ajunge piatra pe pământ este egal cu

$$t_0 = \frac{v_0}{g} + \frac{\sqrt{v_0^2 + 2gh_0}}{g}.$$

Dacă $h_0 = 30$ m și $v_0 = 20$ m/s, atunci $h_{\max} \approx 50$ m și $t_0 \approx 5,5$ s.

2) Din apropierea unui turn avînd înălțimea h_0 este aruncată o piatră vertical în sus de la suprafața pămîntului cu viteza inițială v_0 .

i) Cît trebuie să fie v_0 pentru ca piatra să depășească înălțimea turnului?

ii) În ipoteza că piatra depășește înălțimea turnului să se determine cît timp rămîne deasupra lui.

Caz numeric: $h_0 = 20$ m, $v_0 = 25$ m/s.

Soluție. i) La momentul t , piatra se va găsi la înălțimea $h(t)$ dată de formula

$$h(t) = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2, \text{ unde } g = 9,8 \text{ m/s}^2.$$

Pentru ca piatra să depășească înălțimea turnului trebuie ca $h(t) > h_0$, pentru un $t > 0$.
Avem inecuația de gradul al doilea în t

$$v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 > h_0$$

sau

$$g t^2 - 2 v_0 t + 2 h_0 < 0. \quad (1)$$

Cum g este pozitiv trebuie ca discriminantul $\Delta = 4v_0^2 - 8gh_0$ să fie pozitiv, adică

$$4v_0^2 - 8gh_0 > 0 \text{ de unde } v_0 > \sqrt{2gh_0}.$$

Deci ca piatra să se ridice deasupra turnului viteza sa v_0 trebuie să fie mai mare ca $\sqrt{2gh_0}$.

ii) Să presupunem acum că $v_0 > \sqrt{2gh_0}$. Rezolvînd inecuația (1) obținem că

$$\frac{v_0 - \sqrt{v_0^2 - 2gh_0}}{g} < t < \frac{v_0 + \sqrt{v_0^2 - 2gh_0}}{g}.$$

Dacă notăm $t_1 = \frac{v_0 - \sqrt{v_0^2 - 2gh_0}}{g}$, $t_2 = \frac{v_0 + \sqrt{v_0^2 - 2gh_0}}{g}$ se observă că

$t_1 > 0$ și $t_2 > 0$, iar intervalul (t_1, t_2) este intervalul de timp în decursul căruia piatra se găsește deasupra turnului.

Deci piatra se găsește deasupra turnului un timp egal cu

$$t_2 - t_1 = \frac{2 \sqrt{v_0^2 - 2gh_0}}{g}.$$

Caz numeric. Deoarece $\sqrt{2gh_0} = \sqrt{2 \cdot 9,8 \cdot 20} \approx 20$, atunci $v_0 > 20$.

Deci piatra, prin aruncare, depășește înălțimea turnului.

Timpul cît ea se găsește deasupra turnului este egal cu

$$\frac{2 \sqrt{v_0^2 - 2gh_0}}{g} = \frac{2 \sqrt{625 - 2 \cdot 9,8 \cdot 20}}{9,8} \approx 3 \text{ s.}$$

3) Dintr-o sîrmă cu lungimea de 10 m se confecționează un dreptunghi. Cum trebuie să fie acest dreptunghi pentru ca aria sa să fie maximă?

Soluție. Dacă x și y sînt laturile dreptunghiului, atunci

$2x + 2y = 10$ adică $x + y = 5$. Aria dreptunghiului este

$$S = xy = x(5 - x) = 5x - x^2.$$

Pentru a determina maximul lui S vom determina maximul funcției de gradul al doilea

$$f(x) = 5x - x^2,$$

care este $-\frac{\Delta}{4a} = \frac{25}{4}$ și se realizează pentru $x = \frac{5}{2} = 2,5$. Deci laturile dreptunghiului pentru care aria sa este maximă sînt: $x = 2,5$ m și $y = 2,5$ m. Deci dreptunghiul trebuie să fie un pătrat, iar aria sa maximă este $S_{\max} = 6,25$ m².

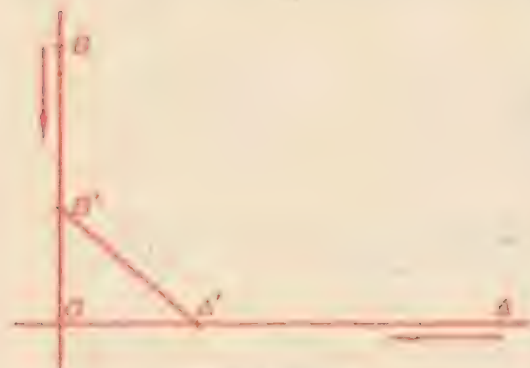


Fig. IV.19

4) Din două orașe A și B situate pe două șosele perpendiculare pleacă în același moment două vehicule cu vitezele constante v_1 și v_2 , în direcția punctului O de intersecție a celor două drumuri (fig. IV.19).

Distanțele orașelor A și B față de punctul de intersecție fiind a , respectiv b , să se determine distanța cea mai mică dintre cele două vehicule.

Caz numeric: $v_1 = 80$ km/h, $v_2 = 60$ km/h; $a = 120$ km și $b = 100$ km.

Soluție. Presupunem că după timpul t primul vehicul ajunge în A' iar al doilea vehicul în B' .

Avem $AA' = v_1 t$, $BB' = v_2 t$ și deci $OA' = a - v_1 t$, $OB' = b - v_2 t$. Din teorema lui Pitagora avem.

$$A'B'^2 = OA'^2 + OB'^2,$$

de unde $A'B'^2 = (a - v_1 t)^2 + (b - v_2 t)^2 = (v_1^2 + v_2^2)t^2 - 2(av_1 + bv_2)t + a^2 + b^2$ și deci $A'B' = \sqrt{(v_1^2 + v_2^2)t^2 - 2(av_1 + bv_2)t + a^2 + b^2}$.

Este clar că distanța dintre cele două vehicule este minimă cînd expresia de sub radical este minimă. Deci vom determina minimul funcției de gradul al doilea

$$f(t) = (v_1^2 + v_2^2)t^2 - 2(av_1 + bv_2)t + a^2 + b^2.$$

Minimul funcției f este

$$\begin{aligned} -\frac{\Delta}{4a} &= -\frac{4[(av_1 + bv_2)^2 - (v_1^2 + v_2^2)(a^2 + b^2)]}{4(v_1^2 + v_2^2)} = \\ &= \frac{(v_1^2 + v_2^2)(a^2 + b^2) - (av_1 + bv_2)^2}{v_1^2 + v_2^2} = \frac{(av_2 - bv_1)^2}{v_1^2 + v_2^2} \end{aligned}$$

și este realizat pentru $t = \frac{av_1 + bv_2}{v_1^2 + v_2^2}$.

Deci minimul distanței este dat de $A'B' = \frac{|av_2 - bv_1|}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}$.

În cazul numeric, minimul distanței, $A'B' = \frac{|120 \cdot 60 - 100 \cdot 80|}{\sqrt{80^2 + 60^2}} = \frac{800}{100} = 8 \text{ (km)}$

Aceasta are loc după un timp egal cu

$$t = \frac{120 \cdot 80 + 100 \cdot 60}{80^2 + 60^2} = 1,5 \text{ ore.}$$

5) Fie o fereastră avînd forma din figura IV.20, la bază fiind dreptunghiulară iar în partea de sus fiind un semicerc. Pentru ce lungime totală de toc de fereastră avem lumina maximă a ferestrei?

Soluție. Fie $2r$ lungimea bazei ferestrei care este egală cu diametrul semicercului și h înălțimea ei (fig. IV.20). Vom nota cu p lungimea totală a tocului de fereastră și S aria totală a ferestrei. Avem $p = 2r + 2h + \pi r$,

$$S = 2rh + \frac{\pi r^2}{2} = \frac{\pi r^2}{2} + r(p - 2r - \pi r) = \frac{\pi r^2}{2} + rp - 2r^2 - \pi r^2 = -\frac{\pi + 4}{2} r^2 + rp.$$

Maximul lui S este egal cu maximul funcției de gradul al doilea

$$f(x) = -\frac{\pi + 4}{2} x^2 + px.$$

Acest maxim este deci

$$S_{\max} = \frac{p^2}{2(\pi + 4)}$$

și este realizat cînd $x = \frac{p}{\pi + 4}$.

Deci trebuie ca $r = \frac{p}{\pi + 4}$ și prin urmare din egalitatea

$$p = 2r + 2h + \pi r$$

obținem că $r = h$.

În concluzie aria S este maximă pentru $r = h = \frac{p}{\pi + 4}$.



Fig. IV.20

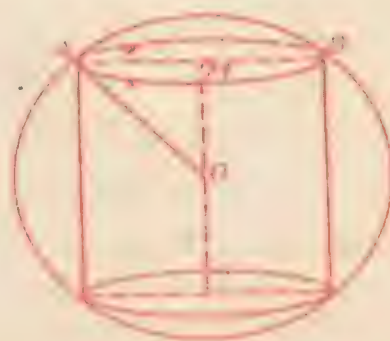


Fig. IV.21

6) Să se taie dintr-o bucată de metal de formă sferică un cilindru avînd aria laterală maximă.

Soluție. Să notăm cu R raza sferei (care este dată), cu r și h , raza, respectiv înălțimea cilindrului care este tăiat din sfera de metal (fig. IV.21). Dacă S este aria laterală a cilindrului, atunci

$$S = 2\pi rh.$$

În triunghiul dreptunghic OAM avem $OA = R$, $OM = \frac{h}{2}$ și $AM = r$.

Din teorema lui Pitagora obținem:

$$OA^2 = OM^2 + MA^2 \text{ sau } R^2 = r^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2, \text{ de unde}$$

$$h^2 = 4R^2 - 4r^2.$$

Atunci $S^2 = 4\pi^2 r^2 h^2 = 4\pi^2 r^2 (4R^2 - 4r^2)$.

Este clar că S este maximă dacă și numai dacă S^2 este maximă.

Deoarece $4\pi^2$ este un număr, atunci S^2 este maximă când cantitatea $r^2(4R^2 - 4r^2)$ este maximă. Notînd $r^2 = x$, avem că $r^2(4R^2 - 4r^2)$ este maximă când $x(4R^2 - 4x)$ este maximă. Deci totul revine la a determina maximul funcției de gradul al doilea

$$f(x) = -4x^2 + 4R^2x.$$

Acest maxim este egal cu

$$-\frac{\Delta}{4a} = R^4$$

și se realizează pentru $x = \frac{1}{2} R^2$. Deci $S_{max} = 2\pi R^2$ și $r^2 = \frac{1}{2} R^2$, adică $r = \frac{\sqrt{2}}{2} R$.

În concluzie, ca cilindrul tăiat din sfera de metal să aibă aria laterală maximă trebuie ca raza cilindrului să fie $r = \frac{\sqrt{2}}{2} R$.

§9. REZOLVAREA CĂTORVA SISTEME DE ECUAȚII CU COEFICIENȚI REALI

În acest paragraf avem în vedere cîteva tipuri de sisteme de ecuații cu coeficienți reali a căror rezolvare se reduce la rezolvarea unei ecuații de gradul al doilea. Trebuie să remarcăm că ori de cîte ori rezolvăm un sistem de ecuații avem în vedere numai soluțiile reale ale acestui sistem.

Vom indica în continuare modul de rezolvare a următoarelor tipuri de sisteme de ecuații:

1. *Sisteme formate dintr-o ecuație de gradul al doilea și una de gradul întâi.*

Aceste sisteme sînt de forma:

$$(S) \begin{cases} ax + by + c = 0, \\ a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 + d_1x + e_1y + f_1 = 0. \end{cases}$$

Rezolvarea acestui tip de sisteme se face prin metoda *substituției*. În prima ecuație putem presupune că, sau $a \neq 0$ sau $b \neq 0$ (cazul cînd $a = b = 0$ ne-ar duce la dispariția primei ecuații). Presupunînd că $b \neq 0$, atunci ecuația $ax + by + c = 0$ este echivalentă cu ecuația $y = \frac{-c - ax}{b} = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$.

Dacă substituim pe y în cea de-a doua ecuație a sistemului (S) , atunci (S) este echivalent cu sistemul:

$$(S') \begin{cases} y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}, \\ a_1x^2 + b_1x\left(-\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}\right) + c_1\left(-\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}\right)^2 + d_1x + e_1\left(-\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}\right) + f_1 = 0. \end{cases}$$

Efectuind calculele în ecuația a doua a sistemului (S') obținem în general o ecuație de gradul al doilea care, rezolvată, ne dă valorile lui x . Apoi, înlocuindu-le în prima ecuație din sistemul (S') obținem valorile lui y .

Discuție. 1) Dacă ecuația a doua a sistemului (S') are două rădăcini reale, atunci sistemul (S) are două soluții reale.

2) Dacă ecuația a doua din sistemul (S') are două rădăcini egale, sau, în cazul cînd aceasta este o ecuație de gradul întâi, atunci sistemul (S) are o soluție reală.

3) Dacă ecuația a doua din sistemul (S') nu are nici o rădăcină reală, atunci sistemul (S) nu are soluții reale.

Exemple. 1) Să se rezolve sistemul

$$(S_1) \begin{cases} 2x + y = 1, \\ y^2 = x^2 - 3x + 3. \end{cases}$$

Cum ecuația $2x + y = 1$ este echivalentă cu ecuația $y = 1 - 2x$, sistemul (S_1) este echivalent cu sistemul (S'_1):

$$(S'_1) \begin{cases} y = 1 - 2x, \\ (1 - 2x)^2 = x^2 - 3x + 3. \end{cases}$$

Ecuația a doua a sistemului (S'_1) se reduce la ecuația de gradul al doilea

$$3x^2 - x - 2 = 0,$$

care are rădăcinile $x_1 = 1$ și $x_2 = -\frac{2}{3}$.

Pentru $x_1 = 1$ obținem $y_1 = -1$, iar pentru $x_2 = -\frac{2}{3}$ obținem $y_2 = \frac{7}{3}$.

$$\text{Deci } \begin{cases} x_1 = +1 \\ y_1 = -1 \end{cases} \text{ și } \begin{cases} x_2 = -\frac{2}{3} \\ y_2 = \frac{7}{3} \end{cases} \text{ sînt soluțiile sistemului } (S_1).$$

2) Să se rezolve sistemul

$$(S_2) \begin{cases} x - y - 1 = 0, \\ x^2 - xy - y^2 + x - 3 = 0. \end{cases}$$

Ecuația $x - y - 1 = 0$ este echivalentă cu ecuația $y = x - 1$. Înlocuind în ecuația a doua pe y obținem că (S_2) este echivalent cu

$$(S'_2) \begin{cases} y = x - 1, \\ x^2 - x(x - 1) - (x - 1)^2 + x - 3 = 0. \end{cases}$$

Ecuația a doua a sistemului (S'_2), după efectuarea calculelor, se reduce la ecuația de gradul al doilea $x^2 - 4x + 4 = 0$, care are o rădăcină dublă $x_1 = x_2 = 2$. Din $y = x - 1$ obținem $y_1 = y_2 = 1$.

Deci perechea (2, 1) este o soluție dublă a sistemului (S_2).

3) Să se rezolve sistemul

$$(S_3) \begin{cases} y - 1 - x = 0; \\ y = -x^2 + 14x - 50. \end{cases}$$

Sistemul (S_3) este echivalent cu sistemul

$$(S'_3) \begin{cases} y = 1 + x, \\ 1 + x = -x^2 + 14x - 50. \end{cases}$$

Ecuatia a doua a sistemului (S'_3) se reduce la ecuatia de gradul al doilea $x^2 - 13x + 51 = 0$. Cum $\Delta = b^2 - 4ac = 169 - 204 = -35 < 0$, atunci sistemul (S'_3) nu are nici o solutie reală.

Interpretarea geometrică a rezolvării sistemului de ecuații de forma

$$(S) \begin{cases} ax + by + c = 0, \\ y = a_1x^2 + b_1x + c_1, \end{cases}$$

unde a, b, c, a_1, b_1, c_1 sînt numere reale date cu $a_1 \neq 0$.

Să notăm cu A mulțimea soluțiilor ecuației $ax + by + c = 0$, iar cu B mulțimea soluțiilor ecuației $y = a_1x^2 + b_1x + c_1$. Mulțimea A reprezintă în planul de coordonate xOy o dreaptă. Mai precis, dacă $b \neq 0$, atunci A reprezintă graficul funcției de gradul întâi: $f(x) = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$. Dacă $b = 0$, atunci ecuația $ax + by + c = 0$ este echivalentă cu ecuația $x = -\frac{c}{a}$. În acest caz A reprezintă dreapta paralelă cu axa $y'y$, care trece prin punctul de coordonate $(-\frac{c}{a}, 0)$.

Mulțimea B reprezintă în planul xOy graficul funcției $g(x) = a_1x^2 + b_1x + c_1$, care este o parabolă.

Cum mulțimea soluțiilor sistemului (S) este egală cu $A \cap B$, atunci soluțiile sistemului (S) reprezintă în planul xOy punctele de intersecție ale dreptei A cu parabola B .

Discuție. 1) Sistemul (S) are două soluții distincte dacă dreapta A intersectează parabola B în două puncte distincte.

2) Sistemul (S) are o singură soluție dacă dreapta A intersectează parabola B într-un singur punct. Trebuie să observăm că în cazul cînd $b = 0$, dreapta A intersectează întotdeauna parabola B într-un singur punct.

3) Sistemul (S) nu are nici o soluție dacă dreapta A nu intersectează parabola B .

Cele trei situații discutate sînt reprezentate în figura IV.22.

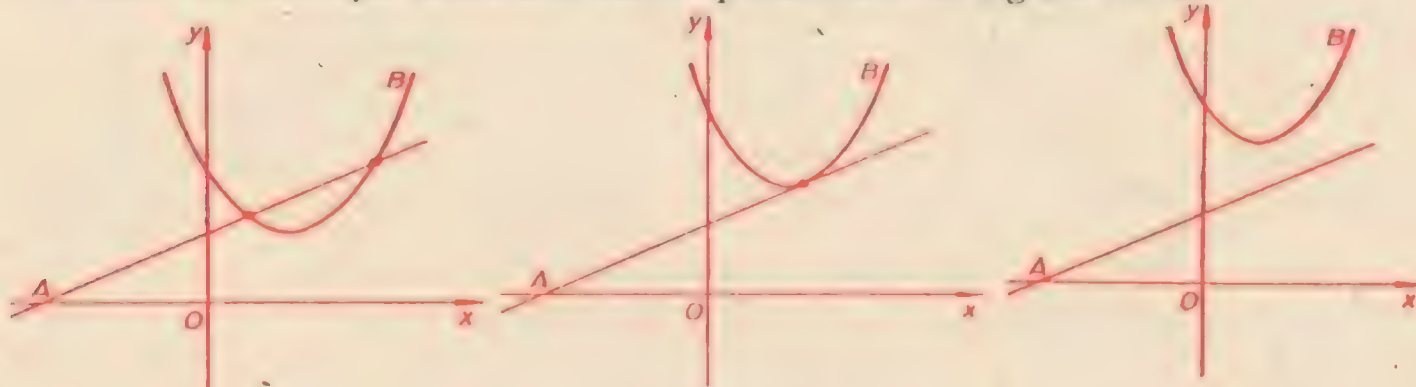


Fig. IV.22

Exemplu. Să se rezolve sistemul de ecuații

$$(S_1) \begin{cases} 2x + y - 4 = 0, \\ y = x^2 - 3x + 2. \end{cases}$$

Din ecuația $2x + y - 4 = 0$ obținem $y = 4 - 2x$. Înlocuind pe y în ecuația a doua obținem: $4 - 2x = x^2 - 3x + 2$, sau $x^2 - x - 2 = 0$. Această ecuație are rădăcinile $x_1 = -1$ și $x_2 = 2$. Atunci avem $y_1 = 4 - 2x_1 = 4 + 2 = 6$ și $y_2 = 4 - 2x_2 = 4 - 4 = 0$. Sistemul (S_1) are soluțiile:

$$\begin{cases} x_1 = -1 \\ y_1 = 6 \end{cases} \text{ și } \begin{cases} x_2 = 2 \\ y_2 = 0. \end{cases}$$

Interpretare geometrică. În figura IV.23 dreapta A ce trece prin punctele de coordonate $(0, 4)$ și $(2, 0)$ reprezintă graficul funcției $f(x) = 4 - 2x$, iar parabola B reprezintă graficul funcției $g(x) = x^2 - 3x + 2$. Dreapta A intersectează parabola B în punctele de coordonate $(-1, 6)$ și $(2, 0)$, care sînt soluțiile sistemului (S_1) .

2) Să se rezolve sistemul de ecuații

$$(S_2) \begin{cases} x - y - 5 = 0, \\ y = x^2 - 3x - 1. \end{cases}$$

Din $x - y - 5 = 0$ obținem $y = x - 5$. Înlocuind pe y în cea de-a doua ecuație a sistemului obținem ecuația $x - 5 = x^2 - 3x - 1$, sau $x^2 - 4x + 4 = 0$. Această ecuație are soluția dublă $x = 2$. Atunci $y = x - 5 = 2 - 5 = -3$. Deci sistemul (S_2) are ca soluție dublă perechea $(2, -3)$.

Interpretare geometrică. În figura IV.24 dreapta A reprezintă graficul funcției $f(x) = x - 5$, iar parabola B reprezintă graficul funcției $g(x) = x^2 - 3x - 1$. Dreapta A intersectează parabola B în punctul de coordonate $(2, -3)$ care reprezintă soluția sistemului (S_2) .

3) Să se rezolve sistemul de ecuații

$$(S_3) \begin{cases} 2x + y + 1 = 0, \\ y = x^2 - 5x + 4. \end{cases}$$

Din $2x + y + 1 = 0$ obținem $y = -2x - 1$. Înlocuind în ecuația a doua a sistemului (S_3) obținem ecuația de gradul al doilea $x^2 - 3x + 5 = 0$. Cum discriminantul acestei ecuații este $\Delta = b^2 - 4ac = -11 < 0$, rezultă că sistemul (S_3) nu are nici o soluție reală.

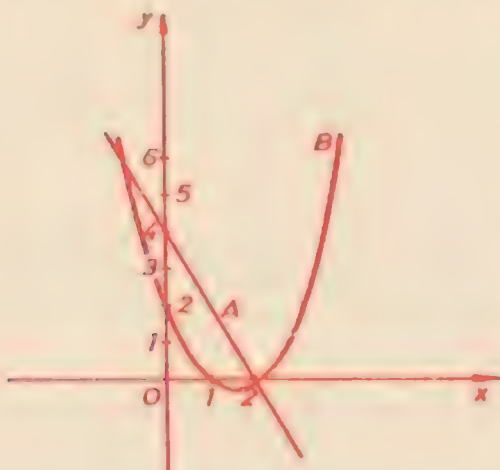


Fig. IV.23

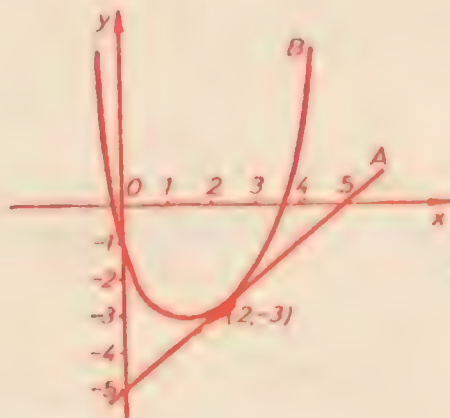


Fig. IV.24



Fig. IV.25

Interpretare geometrică. În figura IV.25 dreapta A este graficul funcției $f(x) = -2x - 1$, iar parabola B este graficul funcției $g(x) = x^2 - 5x + 4$. Dreapta A nu intersectează parabola B în nici un punct.

2. Sisteme de ecuații omogene

Un astfel de sistem este de forma:

$$(S) \begin{cases} a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 = d_1, \\ a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2 = d_2. \end{cases}$$

Sistemul (S) se numește *omogen* deoarece polinoamele $a_1X^2 + b_1XY + c_1Y^2$ și $a_2X^2 + b_2XY + c_2Y^2$ sînt omogene în sensul că toate monoamele care apar în scrierea lor au același grad. Presupunem mai întîi că $d_1 \neq 0$ și $d_2 \neq 0$. Există în acest caz numerele reale α și β diferite de zero astfel încît $\alpha d_1 + \beta d_2 = 0$ (de exemplu $\alpha = 1$ și $\beta = -\frac{d_1}{d_2}$). Se înmulțește prima ecuație cu α și cea de-a doua cu β și apoi se adună. Se obține sistemul echivalent:

$$(S') \begin{cases} a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 = d_1, \\ (\alpha a_1 + \beta a_2)x^2 + (\alpha b_1 + \beta b_2)xy + (\alpha c_1 + \beta c_2)y^2 = 0. \end{cases}$$

Notăm coeficienții ecuației a doua din (S') cu a_3, b_3, c_3 , atunci

$$(S') \begin{cases} a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 = d_1, \\ a_3x^2 + b_3xy + c_3y^2 = 0. \end{cases}$$

Deoarece $d_1 \neq 0$ sistemul (S') nu are soluția $x = 0$ și $y = 0$. Putem presupune că $x \neq 0$. Atunci, în ecuația a doua din (S') împărțim cu x^2 și obținem ecuația de gradul al doilea în $\frac{y}{x}$:

$$c_3 \left(\frac{y}{x}\right)^2 + b_3 \frac{y}{x} + a_3 = 0$$

care, rezolvată, ne dă în general două valori k_1 și k_2 pentru $\frac{y}{x}$. adică:

$$\frac{y}{x} = k_1; \quad \frac{y}{x} = k_2.$$

Acum, rezolvarea sistemului (S) este echivalentă cu rezolvarea următoarelor două sisteme formate dintr-o ecuație de gradul întîi și o ecuație de gradul al doilea:

$$(S_1) \begin{cases} y = k_1x, \\ a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 = d_1 \end{cases}; \quad (S_2) \begin{cases} y = k_2x, \\ a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 = d_1. \end{cases}$$

Cînd $d_1 = 0$ sau $d_2 = 0$, sistemul (S) este de forma (S') și rezolvarea se continuă ca pentru sistemul (S') .

Exemple. 1) Să se rezolve sistemul de ecuații:

$$(S_1) \begin{cases} x^2 + 3xy + y^2 = -2, \\ xy + y^2 = 4. \end{cases}$$

Înmulțind prima ecuație cu $+2$ și adunând-o pe a doua, obținem sistemul echivalent

$$(S_1) \begin{cases} 2x^2 + 7xy + 3y^2 = 0, \\ xy + y^2 = 4. \end{cases}$$

Prima ecuație o împărțim cu x^2 și obținem ecuația de gradul al doilea $3\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 7\frac{y}{x} + 2 = 0$, care, rezolvată, ne dă rădăcinile $\frac{y}{x} = -2$ și $\frac{y}{x} = -\frac{1}{3}$. Rezolvarea sistemului (S_1) se reduce la rezolvarea sistemelor:

$$\begin{cases} y = -2x, \\ xy + y^2 = 4 \end{cases} \quad \text{și} \quad \begin{cases} y = -\frac{1}{3}x, \\ xy + y^2 = 4. \end{cases}$$

Din primul sistem obținem soluțiile:

$$\begin{cases} x = \sqrt{2}, \\ y = -2\sqrt{2} \end{cases}, \quad \begin{cases} x = -\sqrt{2}, \\ y = 2\sqrt{2}. \end{cases}$$

Cel de-al doilea sistem nu are soluții reale.

2) Să se rezolve sistemul de ecuații:

$$(S_2) \begin{cases} 2x^2 + 3xy + y^2 = 0, \\ xy + y^2 = 0. \end{cases}$$

Dacă $x = 0$, atunci din prima ecuație, rezultă $y = 0$. Presupunem $x \neq 0$. Atunci împărțim prima ecuație cu x^2 și obținem ecuația de gradul al doilea

$$\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 3\left(\frac{y}{x}\right) + 2 = 0, \text{ care are rădăcinile: } \frac{y}{x} = -1; \quad \frac{y}{x} = -2.$$

Dacă împărțim ecuația a doua a sistemului cu x^2 obținem ecuația

$$\left(\frac{y}{x}\right)^2 + \frac{y}{x} = 0, \text{ care are rădăcinile: } \frac{y}{x} = 0; \quad \frac{y}{x} = -1.$$

Rădăcina $\frac{y}{x} = -1$ este comună și deci perechea $(a, -a)$ unde $a \in \mathbb{R}$, este soluție a sistemului (S_2) . Deci sistemul are o infinitate de soluții.

3) Să se rezolve sistemul

$$(S_3) \begin{cases} 2x^2 + 3xy + y^2 = 0, \\ x^2 - xy + y^2 = 0. \end{cases}$$

Dacă $x = 0$, atunci din prima ecuație trebuie ca $y = 0$. Presupunem $x \neq 0$. Împărțim cu x^2 ecuația a doua și obținem ecuația în $\frac{y}{x}$:

$$\left(\frac{y}{x}\right)^2 - \left(\frac{y}{x}\right) + 1 = 0, \text{ care nu are nici o soluție reală.}$$

Rezultă că sistemul (S_3) are ca singură soluție perechea $(0, 0)$

3. Sisteme cu ecuații simetrice

O ecuație în două necunoscute se zice *simetrică* dacă înlocuind x cu y și y cu x , ecuația nu se schimbă.

Exemple. 1) Ecuația $2x^2 - 3xy + 2y^2 - 10 = 0$ este simetrică. Într-adevăr, înlocuind x cu y și y cu x obținem ecuația $2y^2 - 3xy + 2x^2 - 10 = 0$, care este identică cu cea inițială.

2) Ecuația $x - y + 5 = 0$ nu este simetrică.

Un sistem de ecuații format din ecuații simetrice se numește *simetric*. Deoarece ecuațiile unui sistem simetric nu se schimbă dacă înlocuim pe x cu y și y cu x , rezultă că dacă $x = a$, $y = b$ este o soluție a sistemului de ecuații, atunci și $x = b$, $y = a$ este soluție a aceluiași sistem de ecuații.

Rezolvarea sistemelor de ecuații simetrice se face astfel: se introduc necunoscutele auxiliare s și p date de relațiile:

$$x + y = s \text{ și } xy = p.$$

Prin introducerea acestor noi necunoscute s și p , în foarte multe cazuri sistemul simetric se reduce la un sistem de ecuații format dintr-o ecuație de gradul întâi și o ecuație de gradul al doilea în necunoscutele s și p . Pentru a face aceste substituții se va ține seama de identitățile:

$$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = s^2 - 2p,$$

$$x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y) = s^3 - 3sp,$$

$$x^4 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 = (s^2 - 2p)^2 - 2p^2.$$

Exemple. 1) Să se rezolve sistemul

$$(S) \quad \begin{cases} xy + x + y = 4, \\ xy - 2(x^2 + y^2) = 23. \end{cases}$$

Sistemul (S) este simetric. Făcând substituțiile $x + y = s$ și $xy = p$ obținem sistemul:

$$(S') \quad \begin{cases} s + p = 4, \\ -2s^2 + 5p = 23. \end{cases}$$

Înlocuind pe $p = 4 - s$ în ecuația a doua, obținem ecuația

$$2s^2 + 5s + 3 = 0, \text{ care are soluțiile: } s_1 = -1; s_2 = -\frac{3}{2}.$$

Atunci $p_1 = 4 - s_1 = 5$ și $p_2 = 4 - s_2 = \frac{11}{2}$. Deci, rezolvarea sistemului (S) se reduce la rezolvarea sistemelor:

$$\begin{cases} x + y = -1, \\ xy = 5 \end{cases} \text{ și } \begin{cases} x + y = -\frac{3}{2}, \\ xy = \frac{11}{2}, \end{cases}$$

care nu au nici o soluție reală. Rezultă că sistemul (S) nu are nici o soluție.

2) Să se rezolve sistemul de ecuații

$$(S) \begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ xy = 2. \end{cases}$$

Făcînd substituțiile $x + y = s$ și $xy = p$ obținem sistemul:

$$(S') = \begin{cases} s^2 - 2p = 5, \\ p = 2, \end{cases} \text{ care are soluțiile: } \begin{cases} s_1 = 3 \\ p_1 = 2 \end{cases}; \begin{cases} s_2 = -3 \\ p_2 = 2. \end{cases}$$

Pentru $s_1 = 3$ și $p_1 = 2$ obținem sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} x + y = 3, \\ xy = 2, \end{cases} \text{ care, rezolvat, ne dă soluțiile: } \begin{cases} x_1 = 2 \\ y_1 = 1 \end{cases}; \begin{cases} x_2 = 1 \\ y_2 = 2. \end{cases}$$

Pentru $s_2 = -3$ și $p_2 = 2$ obținem sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} x + y = -3, \\ xy = 2, \end{cases} \text{ care, rezolvat, ne dă soluțiile: } \begin{cases} x_3 = -2, \\ y_3 = -1 \end{cases}; \begin{cases} x_4 = -1, \\ y_4 = -2. \end{cases}$$

Deci sistemul (S) are patru soluții.

EXERCIIU

Funcția de gradul al doilea

1. Fie $f(x) = a_1x^2 + b_1x + c_1$ și $g(x) = a_2x^2 + b_2x + c_2$ două funcții de gradul al doilea. Să se arate că $f = g \Leftrightarrow a_1 = a_2, b_1 = b_2$ și $c_1 = c_2$.

2. Să se aducă la forma canonică următoarele funcții de gradul al doilea:

a) $f(x) = x^2 - x + 11$;

b) $f(x) = -2x^2 - 7x + 1$;

c) $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$;

d) $f(x) = 0,51x^2 - 0,1x + 1$;

e) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}$;

f) $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{5}x + 1$.

3. Să se construiască graficul următoarelor funcții (folosind metoda prin puncte și efectuînd una sau două translații):

a) $f(x) = -2x^2 + 1$;

b) $f(x) = x^2 - x + 11$;

c) $f(x) = -3x^2 + 8x + 3$;

d) $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$;

e) $f(x) = x^2 + x - 2$;

f) $f(x) = -x^2 + 3x - 2$.

4. Să se stabilească maximum sau minimum următoarelor funcții:

a) $f(x) = x^2 - 2x + 10$;

b) $f(x) = -x^2 + 2x - 12$;

c) $f(x) = x^2 - 5$;

\rightarrow d) $f(x) = -12x^2 + 31x - 1$;

e) $f(x) = -x^2 - 2x + 1$;

f) $f(x) = 0,5x^2 + 0,7x - 0,31$.

5. Să se stabilească intervalele de monotonie pentru următoarele funcții de gradul al doilea:

\rightarrow a) $f(x) = x^2 - 2x - 1$;

b) $f(x) = x^2 - 2x + 1$;

c) $f(x) = 0,5x^2 - 7x$;

\rightarrow d) $f(x) = -0,3x^2 + x - 0,5$.

6. Să se stabilească semnul următoarelor funcții:

a) $f(x) = x^2 - 2x - 3$;

b) $f(x) = 0,3x^2 - x + 0,1$;

c) $f(x) = 0,5x^2 - 7x$;

d) $f(x) = -2x^2 + x + 1$.

7. Să se facă tabelul de variație și apoi să se traseze graficul la următoarele funcții:

a) $f(x) = x^2 - 4x + 3$;

b) $f(x) = -2x^2 + 3x - 1$;

c) $f(x) = x^2 - 2x - 4$;

d) $f(x) = x^2 - 0,5x$;

e) $f(x) = x^2 - x + 10$;

f) $f(x) = x^2 - 2x + 1$.

8. Să se arate că orice funcție de gradul al doilea nu este nici injectivă și nici surjectivă.

9. Să se determine funcția de gradul al doilea $f(x) = ax^2 + bx + c$, astfel încât graficul acestei funcții să treacă prin punctele $A(1, -8)$, $B(-1, -10)$ și să taie axa $y'y$ în punctul $C(0, -10)$.

10. Să se determine funcția de gradul al doilea $f(x) = ax^2 + bx + c$ astfel încât graficul acestei funcții să aibă vârful în punctul $V(1, 2)$ și să taie axa $y'y$ în punctul $B(0, -3)$.

11. Fie familia de funcții de gradul al doilea $f_m(x) = x^2 - 2(m-1)x + m - 2$, unde m este parametru real.

Să se arate că virfurile parabolilor asociate acestor funcții se găsesc pe o parabolă.

12. Să se determine funcția de gradul al doilea $f(x) = ax^2 + bx + c$, știind că admite un minim egal cu 9 și graficul funcției trece prin punctele $A(-1, 13)$ și $B(2, 10)$.

Inecuații de gradul al doilea. Sisteme de inecuații de gradul al doilea

13. Să se rezolve inecuațiile:

a) $2x^2 - 3x + 1 > 0$;

b) $x^2 - 3x + 4 \geq 3x + 2$;

c) $2x^2 - 2x < -\frac{1}{2}$;

d) $-x^2 - 3x + 5 < x^2 - 1$;

e) $x^2 + x + 7 \leq 0$;

f) $-x^2 + 2x > x + \frac{1}{4}$;

g) $\frac{x+1}{x+2} \geq \frac{2x-1}{x-2}$;

h) $\frac{x-1}{x^2-3x+2} > 2$;

i) $|x^2 - 3x + 2| < |x + 2|$;

j) $\left| \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 4} \right| \leq 1$;

k) $\frac{x^2 - 6x - 16}{-x^2 + 8x - 12} > 0$;

l) $-1 < \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 4x + 3} \leq 2$.

14. Pentru ce valori reale ale lui m următoarea inecuație este verificată pentru orice $x \in \mathbb{R}$

$$(m-1)x^2 - (m+1)x + (m+1) > 0.$$

15. Să se determine valorile lui m așa încât inecuația

$$mx^2 + (m-1)x - (m-2) > 0$$

să nu aibă nici o soluție.

16. Să se determine valorile lui m astfel încât ecuația

$$(m-3)x^2 - 2(3m-4)x + 7m-6 = 0$$

să aibă rădăcini reale.

17. Fie fracția $E = \frac{x^2 + (m+1)x + m + 2}{x^2 + x + m}$. Să se determine m astfel încât fracția E

să aibă sens și să fie pozitivă pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

18. Să se rezolve sistemele de inecuații:

$$a) \begin{cases} x^2 - 3x > -2, \\ x^2 + x \leq 12; \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} -x^2 - x < -6, \\ 2x^2 - 1 \leq \frac{17}{3}x; \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} 2x - 1 > x - 5, \\ x - 6 \geq 0, \\ x^2 - 3x - 4 \geq 0; \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} (x - 1)(x - 3) \geq (x - 1)(x + 2), \\ (x - 2)(x - 3) \leq (x + 2)(x + 3), \\ x^2 - 3x + 2 \geq 0; \end{cases}$$

$$e) \begin{cases} \frac{x^2 - 6x + 5}{-3x^2 - 2x - 7} < 0, \\ x^2 \leq 16; \end{cases}$$

$$f) \begin{cases} |x^2 - 4x + 3| + x - 2 \geq 0, \\ x^2 \leq 25. \end{cases}$$

19. Fie familia de funcții de gradul al doilea

$$f_m(x) = mx^2 + 2(m + 1)x + m + 2, \text{ unde } m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \quad (1)$$

a) Să se arate că virfurile parabolilor asociate acestor funcții se găsesc pe dreapta $y = x + 1$.

b) Fie A , B punctele de intersecție ale unei parabole oarecare cu $x'x$ și F proiecția vârfului V al parabolei pe $x'x$. Să se arate că oricare ar fi m , $AB = 2 \cdot FV$.

c) Să se arate că toate parabolele definite prin (1) trec printr-un punct fix.

20. Dacă $f: A \rightarrow B$ este o funcție oarecare, vom numi *imaginea* ei mulțimea notată $\text{Im } f$ și definită astfel

$$\text{Im } f = \{f(x) \mid x \in A\} = \{y \in B \mid \exists x \in A, y = f(x)\}.$$

Să se determine $\text{Im } f$ pentru următoarele funcții:

$$\begin{aligned} a) f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |x - 1|, \quad b) f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 1, \quad c) f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \\ = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + x + 1}, \quad d) f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2 - 4x + 5}{x^2 - 2x + 2}, \quad e) f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \\ = \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 2x + 1}, \quad f) f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 + x + 1. \end{aligned}$$

Sisteme de ecuații. Aplicații practice

21. Să se rezolve sistemele de ecuații:

$$a) \begin{cases} x^2 - xy - y = 5, \\ 2x - 3y = 3; \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x^2 + 3xy - y^2 + 2x - 5y = -64, \\ x - y = -7; \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} 2x - 3y = 1, \\ x^2 - xy + 5y^2 = 7; \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} x^2 - y^2 - 6y = -4, \\ 2x + y = 3; \end{cases}$$

$$e) \begin{cases} \frac{x^2 - xy + 1}{x - y} = 3, \\ 2x + 3y = 7; \end{cases}$$

$$f) \begin{cases} \frac{x^2 - xy + 1}{x + y} = x - y, \\ x + 2y = 4. \end{cases}$$

22. Să se rezolve sistemele omogene :

$$a) \begin{cases} x^2 - 5y^2 = -1, \\ x^2 + xy = 6; \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x^2 - 3xy + y^2 = -1, \\ 3x^2 - xy + 3y^2 = 13; \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} 2x^2 - 3xy - 19y^2 = 25, \\ x^2 - 6y^2 = 250; \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} 2y^2 - 3x^2 = -19, \\ xy = -6; \end{cases}$$

$$e) \begin{cases} 7x^2 - 6xy + 12y^2 = 108, \\ x^2 - \frac{5}{6}xy + \frac{7}{3}y^2 = 18; \end{cases}$$

$$f) \begin{cases} 2x^2 - 3xy + 2y^2 = 5, \\ x^2 - xy - y^2 = -2. \end{cases}$$

23. Să se rezolve sistemele de ecuații simetrice:

$$a) \begin{cases} x + xy + y = 11, \\ x - xy + y = 1; \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} xy + y + x = 11, \\ x^2y + y^2x = 30; \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x^2 + y^2 = 8, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1; \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} x^3 + y^3 = 1, \\ x + y = 1; \end{cases}$$

$$e) \begin{cases} 5x^2 - 6xy + 5y^2 = 29, \\ 7x^2 - 8xy + 7y^2 = 43; \end{cases}$$

$$f) \begin{cases} xy + x + y = 7, \\ xy - 3(x + y) = -9. \end{cases}$$

24. Fie O un cerc avînd diametrul $AB = 2a$. Pe acest diametru considerăm un punct variabil M . Construim două cercuri O_1 și O_2 avînd segmentele $[AM]$ și $[BM]$ ca diametre. Să se determine punctul M astfel încît aria cuprinsă între cele trei cercuri să fie maximă.

25. Fie ABC un triunghi dreptunghic în vîrfurile A , avînd catetele $AB = a$ și $AC = b$. Se înscrie în acest triunghi un dreptunghi $MNPQ$ avînd vîrfurile P și Q pe ipotenuza triunghiului, M pe (AB) și N pe (AC) . Să se determine laturile acestui dreptunghi astfel încît aria sa să fie maximă.

26. Un călător merge cu automobilul pe o șosea rectilinie AB din orașul A pînă într-un punct C , de unde pleacă mai departe pe jos peste cîmp într-un sat D . Se știe că viteza automobilului este v_1 km/h, iar pe jos călătorul face v_2 km/h. Cum trebuie ales punctul C astfel ca tot drumul să se facă în timpul minim?

27. Să se găsească maximul ariei unui dreptunghi înscris într-un cerc dat.

28. Să se găsească minimul perimetrului unui trapez isoscel circumscris unui cerc dat.

29. Să se calculeze catetele unui triunghi dreptunghic cunoscînd ipotenuza a și înălțimea h . Discuție.

30. Să se calculeze laturile unui triunghi dreptunghic cunoscînd perimetrul $2p$ și înălțimea h . Discuție.

31. Într-un semicerc de rază R să se înscrie un trapez isoscel de perimetru dat $2p$. Discuție.

32. Să se circumscrie unui cerc de rază R un trapez isoscel de arie dată $4R^2$. Discuție.

33. Într-un patrulater $ABCD$ care are unghiurile din vîrfurile din A și C de 90° , se dau laturile $AB = a$, $BC = b$ și aria egală cu k^2 . Să se calculeze celelalte două laturi ale patrulaterului. Discuție.
34. Două brigăzi trebuiau să execute o lucrare. La început prima brigadă a întrebuițat pentru lucrare o treime din timpul pe care l-ar fi întrebuițat cealaltă brigadă pentru executarea întregii lucrări; după aceea, a doua brigadă a lucrat o treime din timpul pe care prima brigadă l-ar fi întrebuițat pentru întreaga lucrare. După aceasta s-a constatat că s-a executat $\frac{13}{18}$ din întreaga lucrare. Să se afle în cît timp ar fi terminat lucrul fiecare brigadă în parte, dacă împreună aceste brigăzi pot să-l execute în $3 \frac{3}{5}$ ore.
35. Un dreptunghi este înscris într-un cerc cu raza de 50 m. Să se determine laturile sale știind că diferența lor este egală cu 20 m.

CAPITOLUL V PUTERI ȘI RADICALI

§1. PUTERI

Pe parcursul acestui capitol vom nota cu N^* mulțimea numerelor naturale nenule: $N^* = \{1, 2, 3, \dots\}$.

1.1. Puteri cu exponent natural nenul

Fie a un număr real și n un număr natural mai mare sau egal cu 2. Se numește *puterea n a numărului a* produsul a n numere, fiecare număr fiind egal cu a . Acest număr se notează cu a^n .
Deci:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \dots a}_{n \text{ ori}}$$

În reprezentarea a^n , a se numește *baza puterii*, iar n *exponentul puterii*.
Convenim să punem $a^1 = a$.

Exemple: 1) $(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$;

$$2) \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16} = 0,0625.$$

1. Semnul puterii cu exponent natural

Puterea unui număr real pozitiv cu exponent natural nenul este pozitivă. Puterea unui număr real negativ cu exponent natural par este pozitivă, iar cu exponent natural impar este negativă.

Într-adevăr dacă $a > 0$, atunci a^n fiind produsul a n numere pozitive este pozitiv. Dacă $a < 0$, atunci din regula semnelor rezultă că a^{2n} , care este produsul unui număr par de numere negative, este pozitiv, iar a^{2n+1} , care este produsul unui număr impar de numere negative, este negativ.

De exemplu $(-2)^0$ are semnul $(-)$ iar $(-2)^{12}$ are semnul $(+)$.

2. Puterea produsului și a cîtului a două numere reale

Fie a, b , două numere reale și $n \in N^*$. Atunci

$$(ab)^n = a^n b^n$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad (b \neq 0).$$

Intr-adevăr: $(ab)^n = \underbrace{(ab) \cdot (ab) \dots (ab)}_{n \text{ ori}} = \underbrace{(a \cdot a \dots a)}_{n \text{ ori}} \cdot \underbrace{(b \cdot b \dots b)}_{n \text{ ori}} = a^n b^n$

(am folosit asociativitatea și comutativitatea produsului a două numere reale).

De asemenea: $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \dots \frac{a}{b} = \frac{a \cdot a \dots a}{b \cdot b \dots b} = \frac{a^n}{b^n}$.

Observație: În calcule, deseori, folosim egalitățile de mai sus sub forma:

$$a^n b^n = (ab)^n \quad \text{și} \quad \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n.$$

De exemplu: $6^5 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^5 = \left(6 \cdot \frac{1}{4}\right)^5 = \left(\frac{3}{2}\right)^5 = \frac{3^5}{2^5} = \frac{243}{32}$.

3. Înmulțirea puterilor care au aceeași bază

Dacă a este un număr real și $m, n \in \mathbb{N}^*$ atunci

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}.$$

Intr-adevăr $a^m \cdot a^n = \underbrace{(a \cdot a \dots a)}_{m \text{ ori}} \cdot \underbrace{(a \cdot a \dots a)}_{n \text{ ori}} = \underbrace{a \cdot a \dots a}_{(m+n) \text{ ori}} = a^{m+n}$.

De exemplu: 1) $2^3 \cdot 2^4 = 2^7 = 128$; 2) $(-2) \cdot (-2)^4 = (-2)^5 = -32$.

4. Ridicarea unei puteri la altă putere

Dacă a este un număr real și $m, n \in \mathbb{N}^*$, atunci

$$(a^m)^n = a^{mn}.$$

Intr-adevăr. $(a^m)^n = \underbrace{a^m \cdot a^m \dots a^m}_n = a^{\overbrace{m+m+\dots+m}^{n \text{ ori}}} = a^{mn}$.

(Am folosit proprietatea 3.)

De exemplu: $(2^3)^2 = 2^3 \cdot 2 = 2^6 = 64$; $\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^4\right]^2 = \left(-\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{1}{256}$.

5. Împărțirea a două puteri cu aceeași bază

Dacă a este un număr real nenul și $m, n \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $m > n$, atunci

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}.$$

Intr-adevăr, folosind proprietatea 3, avem: $a^{m-n} \cdot a^n = a^{(m-n)+n} = a^m$, de unde rezultă că $a^{m-n} = \frac{a^m}{a^n}$.

De exemplu: $\frac{3^{10}}{3^8} = 3^{10-8} = 3^2 = 9$; $\frac{4^5}{4^3} = 4^{5-3} = 4^2 = 16$.

1.2. Funcția putere

Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Definim funcția

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^n.$$

Această funcție se numește *funcția putere de gradul n* .

Observații: 1) Funcția putere este o funcție numerică.

2) Pentru $n = 1$ se obține funcția de gradul întâi $f(x) = x$, iar pentru $n = 2$ se obține funcția de gradul al doilea $f(x) = x^2$.

Teorema 1. 1° Dacă n este un număr par, atunci funcția $f(x) = x^n$ este strict descrescătoare pe intervalul $(-\infty, 0]$ și strict crescătoare pe intervalul $[0, \infty)$.

2° Dacă n este un număr impar atunci funcția $f(x) = x^n$ este strict crescătoare pe \mathbb{R} .

Demonstrație. Vom arăta mai întâi egalitatea

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

Într-adevăr, $(a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}) = a^n + a^{n-1}b + \dots$

$$+ \dots + a^2b^{n-2} + ab^{n-1} - a^{n-1}b - a^{n-2}b^2 - \dots - ab^{n-1} - b^n = a^n - b^n.$$

Să demonstrăm acum afirmația 1° din teoremă. Presupunem că n este par, adică $n = 2m$. Fie $x_1, x_2 \in [0, \infty)$ astfel încît $x_1 < x_2$.

Din egalitatea: $x_1^{2m} - x_2^{2m} = (x_1 - x_2)(x_1^{2m-1} + x_1^{2m-2}x_2 + \dots + x_1x_2^{2m-2} + x_2^{2m-1})$, cum $0 \leq x_1 < x_2$, atunci $x_1 - x_2 < 0$ și $x_1^{2m-1} + x_1^{2m-2}x_2 + \dots + x_1x_2^{2m-2} + x_2^{2m-1} > 0$, de unde obținem $x_1^{2m} - x_2^{2m} < 0$, deci $f(x_1) < f(x_2)$.

Rezultă că funcția $f(x) = x^{2m}$ este strict crescătoare pe intervalul $[0, \infty)$. Presupunem acum că $x_1, x_2 \in (-\infty, 0]$ astfel încît $x_1 < x_2$. Cum $x_1 < x_2 \leq 0$, atunci $(-x_1) > (-x_2) \geq 0$ și deci $(-x_1)^{2m} > (-x_2)^{2m}$, adică $x_1^{2m} > x_2^{2m}$. Prin urmare $f(x_1) > f(x_2)$, ceea ce ne arată că f este strict descrescătoare pe intervalul $(-\infty, 0]$.

2° Presupunem acum că n este impar, adică $n = 2m + 1$ și fie $x_1 < x_2$.

Dacă $0 \leq x_1 < x_2$, la fel ca mai sus avem că $x_1^{2m+1} < x_2^{2m+1}$. Dacă $x_1 < x_2 \leq 0$, atunci $(-x_1) > (-x_2) \geq 0$ și deci $(-x_1)^{2m+1} > (-x_2)^{2m+1}$, adică $-x_1^{2m+1} > -x_2^{2m+1}$ și deci $x_1^{2m+1} < x_2^{2m+1}$.

Dacă $x_1 < 0$ și $x_2 \geq 0$, atunci x_1^{2m+1} este un număr negativ, iar $x_2^{2m+1} \geq 0$ și deci în acest caz avem $x_1^{2m+1} < x_2^{2m+1}$. În concluzie, din $x_1 < x_2$ se obține $x_1^{2m+1} < x_2^{2m+1}$, adică $f(x_1) < f(x_2)$, adică funcția $f(x) = x^{2m+1}$ este strict crescătoare pe \mathbb{R} .

Definiție. O submulțime A a lui \mathbb{R} se zice *simetrică* dacă pentru orice $x \in A$ avem și $-x \in A$.

Exemple. 1) Mulțimile \mathbb{R} , $\mathbb{R} - \{0\}$, $[-1, 1]$ sînt simetrice.

2) Mulțimile $[0, \infty)$, $[0, 1]$, $[-1, 2]$ nu sînt simetrice.

Definiție. Fie A o mulțime simetrică și $f: A \rightarrow B$ o funcție numerică. Funcția f se zice *pară* dacă pentru orice $x \in A$ avem $f(-x) = f(x)$. Funcția f se zice *impară* dacă pentru orice $x \in A$ avem $f(-x) = -f(x)$.

Teorema 2. Dacă n este un număr par, funcția putere $f(x) = x^n$ este o funcție pară. Dacă n este un număr impar, funcția putere $f(x) = x^n$ este impară.

Demonstrație. Dacă $n = 2m$, atunci $f(-x) = (-x)^{2m} = x^{2m} = f(x)$ și deci funcția $f(x) = x^{2m}$ este pară. Dacă $n = 2m + 1$, atunci $f(-x) = (-x)^{2m+1} = -x^{2m+1} = -f(x)$ și deci funcția $f(x) = x^{2m+1}$ este impară.

Interpretarea geometrică. Fie $f: A \rightarrow B$ o funcție numerică unde mulțimea A este simetrică. Dacă f este o funcție pară, atunci $y'y$ este axă de simetrie pentru graficul funcției f . Într-adevăr dacă $M(x_0, y_0)$ este un punct al graficului funcției f , atunci din egalitatea $y_0 = f(x_0) = f(-x_0)$ rezultă că și punctul $M'(-x_0, y_0)$ este un punct al graficului. Dar M' este simetricul lui M față de $y'y$. Dacă f este o funcție impară atunci originea axelor O este centru de simetrie al graficului funcției f .

Într-adevăr, dacă $M(x_0, y_0)$ este un punct al graficului, din egalitatea $y_0 = f(x_0) = -f(-x_0)$ rezultă că și punctul $M'(-x_0, -y_0)$ aparține graficului. Dar M' este simetricul lui M față de originea axelor.

Graficul funcției putere $f(x) = x^n$ pentru $n = 3, 4$

1. Funcția $f(x) = x^3$. Trasarea graficului funcției $f(x) = x^3$ se face prin „puncte”. Mai exact, funcției $f(x) = x^3$ i se asociază următorul tabel de valori:

x	$-\infty$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	$+\infty$
$f(x) = x^3$		-64	-27	-8	-1	0	1	8	27	64	

Reprezentăm într-un sistem de axe xOy , punctele ale căror coordonate sînt valorile din tabel. Punctele obținute le unim printr-o linie continuă. În figura V.1 este schițat graficul funcției $f(x) = x^3$.

Graficul acestei funcții se numește *parabolă cubică*.

Parabola cubică are următoarele proprietăți:

1) trece prin originea axelor, care este un centru de simetrie (deoarece $f(x) = x^3$ este funcție impară);

2) ramura din dreapta a graficului se găsește deasupra axei $x'x$, iar ramura din stînga se găsește sub axa $x'x$.

Observație. Graficul funcției $f(x) = x^{2m+1} (m \geq 1)$ are o comportare asemănătoare cu graficul funcției $f(x) = x^3$.

2. Funcția $f(x) = x^4$. Graficul acestei funcții se trasează tot prin „puncte”. Pentru această funcție se asociază următorul tabel de valori:

x	$-\infty$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	$+\infty$
$f(x) = x^4$		256	81	16	1	0	1	16	81	256	

Punctele ale căror coordonate sînt valorile din tabel le reprezentăm într-un sistem rectangular de axe xOy . Punctele obținute le unim printr-o linie continuă. În figura V.2 este schițat graficul funcției $f(x) = x^4$.

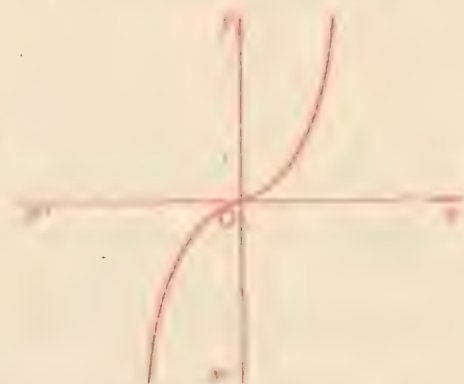


Fig. V.1

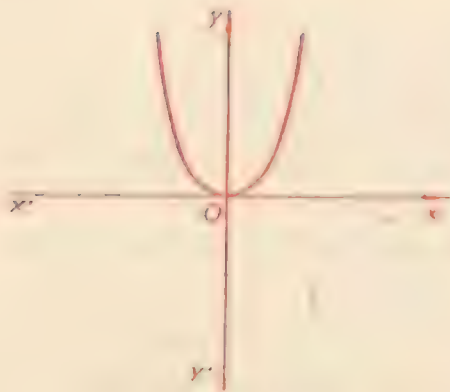


Fig. V.2

Graficul acestei funcții are următoarele proprietăți:

1° Se găsește deasupra axei $x'x$ și trece prin originea axelor.

2° Axa $y'y$ este axă de simetrie pentru graficul funcției $f(x) = x^4$ (deoarece $f(x) = x^4$ este o funcție pară).

Observație. Graficul funcției $f(x) = x^{2m}$ ($m \geq 1$) are o comportare asemănătoare cu graficul funcției $f(x) = x^4$.

1.3. Puterea cu exponent întreg

Am demonstrat că pentru $m > n$

$$a^m : a^n = a^{m-n} \quad (a \neq 0).$$

Vom căuta să lărgim noțiunea de putere astfel încît formula $a^m : a^n = a^{m-n}$ ($a \neq 0$) să aibă loc și pentru cazul cînd $m \leq n$.

1) *Exponentul 0.* Dacă $a \neq 0$, prin definiție vom pune $a^0 = 1$.

Dacă $m = n$, atunci $a^m : a^n = 1$ și $a^{m-n} = a^0 = 1$. Rezultă că formula $a^m : a^n = a^{m-n}$ are loc și pentru cazul $m = n$.

Observație. Expresia 0^0 nu are nici un sens.

2) *Exponent negativ.* Dacă $n \in \mathbb{N}^*$ și a este un număr real nenul, prin definiție vom pune $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

De exemplu, $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8} = 0,125$; $3^{-1} = \frac{1}{3} = 0,333$.

Dacă $m, n \in \mathbb{N}$ astfel încît $m < n$, atunci $\frac{a^m}{a^n} = \frac{a^m}{a^{m+(n-m)}} = \frac{a^m}{a^m \cdot a^{n-m}} = \frac{1}{a^{n-m}} = a^{-(n-m)} = a^{m-n}$.

Rezultă că formula $a^m : a^n = a^{m-n}$ are loc și pentru cazul $m < n$.

3) *Exponent întreg.* În urma definirii puterilor cu exponent 0 și negativ expresia a^n , $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}$ este bine precizată exceptînd cazul $a = 0$. Vom arăta că proprietățile puterilor cu exponent natural se păstrează și pentru exponent întreg:

$$1^\circ (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n; \quad 3^\circ a^m \cdot a^n = a^{m+n}; \quad 5^\circ a^m : a^n = a^{m-n}.$$

$$2^\circ \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}; \quad 4^\circ (a^m)^n = a^{mn}.$$

Să verificăm 1°. Pentru exponent $n > 0$ am demonstrat egalitatea 1°. Dacă $n = 0$, atunci $(a \cdot b)^0 = 1$ și $a^0 \cdot b^0 = 1 \cdot 1 = 1$. Deci

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n, \text{ are loc și pentru } n = 0.$$

Presupunem $n < 0$. Atunci $(ab)^n = \frac{1}{(ab)^{-n}}$.

Cum $-n > 0$, atunci $\frac{1}{(ab)^{-n}} = \frac{1}{a^{-n} \cdot b^{-n}} = \frac{1}{a^{-n}} \cdot \frac{1}{b^{-n}} = a^n \cdot b^n$. Deci egalitatea

$(ab)^n = a^n b^n$ are loc și pentru $n < 0$.

În același fel se verifică egalitatea 2°.

Să verificăm egalitatea

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \quad (a \neq 0). \quad (1)$$

Deoarece pentru $m > 0$ și $n > 0$ egalitatea (1) este adevărată, rămâne de arătat pentru următoarele trei cazuri:

Cazul $m > 0$ și $n < 0$. Atunci $a^m \cdot a^n = a^m \cdot \frac{1}{a^{-n}} = \frac{a^m}{a^{-n}}$.

Dar cum $-n > 0$, am văzut că $\frac{a^m}{a^{-n}} = a^{m-(-n)} = a^{m+n}$ și deci $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.

Cazul $m < 0$ și $n < 0$. Avem $a^m \cdot a^n = \frac{1}{a^{-m}} \cdot \frac{1}{a^{-n}} = \frac{1}{a^{-m} \cdot a^{-n}}$.

Cum $-m > 0$ și $-n > 0$, atunci $a^{-m} \cdot a^{-n} = a^{-(m+n)}$.

Deci $a^m \cdot a^n = \frac{1}{a^{-(m+n)}} = a^{m+n}$.

Cazul cînd unul dintre m sau n este zero. Presupunem că $n = 0$.

Atunci $a^m \cdot a^n = a^m \cdot a^0 = a^m \cdot 1 = a^m$ și $a^{m+n} = a^{m+0} = a^m$.

Deci și în acest caz avem $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.

Din egalitatea 3° rezultă și egalitatea $a^m : a^n = a^{m-n}$ ($a \neq 0$).

Să verificăm egalitatea

$$(a^m)^n = a^{mn} \quad (a \neq 0). \quad (2)$$

Deoarece pentru $m > 0$ și $n > 0$ egalitatea (2) este adevărată, rămâne de arătat în următoarele cazuri:

Cazul $m < 0$ și $n > 0$. Avem $(a^m)^n = \left(\frac{1}{a^{-m}}\right)^n = \frac{1}{a^{(-m)n}}$.

Cum $-m > 0$, atunci $(a^{-m})^n = a^{-mn}$. Deoarece $-mn < 0$ atunci $a^{-mn} = \frac{1}{a^{mn}}$ și deci $(a^m)^n = a^{mn}$.

Cazul $m > 0$ și $n < 0$. Avem $(a^m)^n = \frac{1}{(a^m)^{-n}} = \frac{1}{a^{-mn}} = a^{mn}$. Deci $(a^m)^n = a^{mn}$.

Cazul $m < 0$ și $n < 0$. Avem $(a^m)^n = \frac{1}{(a^m)^{-n}}$. Din primul caz obținem că $(a^m)^{-n} = a^{-mn}$ și cum $mn > 0$, atunci $\frac{1}{a^{-mn}} = \frac{1}{\frac{1}{a^{mn}}} = a^{mn}$. Deci $(a^m)^n = a^{mn}$.

Cazul cînd unul dintre m sau n este zero. Dacă $m = 0$, atunci $a^m = 1$ și deci $(a^m)^n = 1^n = 1$. Dar cum $a^{mn} = a^0 = 1$, rezultă $(a^m)^n = a^{mn}$.

Dacă $n = 0$, atunci $(a^m)^n = (a^m)^0 = 1$ și $a^{mn} = a^0 = 1$. Deci și în acest caz avem $(a^m)^n = a^{mn}$.

Exemple: 1) $3^{-6} \cdot 3^8 = 3^{-6+8} = 3^2 = 9$;

$$2) (4^2)^{-3} = 4^{-4} = \frac{1}{4^4} = \frac{1}{256};$$

$$3) \left[\left(\frac{1}{3} \right)^{-2} \right]^3 [(-1)^{-2}]^3 = (3^2)^3 = 3^6 = 729.$$

1.4. Funcția putere de exponent negativ

Vom studia funcția

$$f: \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^{-n}, n \in \mathbb{N}^*.$$

Vom distinge două cazuri: 1) $n = 2m$; 2) $n = 2m + 1$.

$$1) f: \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x^{2m}}.$$

În § 2 s-a arătat că dacă $0 < x_1 < x_2$, atunci $x_1^{2m} < x_2^{2m}$,

de unde $\frac{1}{x_1^{2m}} > \frac{1}{x_2^{2m}}$ și deci f este *strict descrescătoare pe intervalul* $(0, \infty)$.

Dacă $x_1 < x_2 < 0$, atunci $x_1^{2m} > x_2^{2m}$ și deci $\frac{1}{x_1^{2m}} < \frac{1}{x_2^{2m}}$,

ceea ce ne arată că f este *strict crescătoare pe intervalul* $(-\infty, 0)$.

Cum $x^{2m} = (-x)^{2m}$, atunci $f(x) = f(-x)$ și deci f este o *funcție pară*.

$$2) f: \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x^{2m+1}}.$$

Dacă $0 < x_1 < x_2$, atunci $0 < x_1^{2m+1} < x_2^{2m+1}$, de unde $\frac{1}{x_1^{2m+1}} > \frac{1}{x_2^{2m+1}}$ și deci f este *strict descrescătoare pe intervalul* $(0, \infty)$.

Dacă $x_1 < x_2 < 0$, atunci $x_1^{2m+1} < x_2^{2m+1} < 0$ și deci $\frac{1}{x_1^{2m+1}} > \frac{1}{x_2^{2m+1}}$, ceea ce arată că f este *strict descrescătoare și pe intervalul* $(-\infty, 0)$.

Cum $x^{2m+1} = -(-x)^{2m+1}$, atunci $f(x) = -f(-x)$ și deci f este o *funcție impară*.

Observație. Deși funcția f este strict descrescătoare pe intervalele $(-\infty, 0)$ și $(0, \infty)$ ea nu este strict descrescătoare pe mulțimea $\mathbb{R} - \{0\}$. Într-adevăr dacă $x_1 = -1$, $x_2 = 1$

atunci $x_1 < x_2$. Dar $f(x_1) = f(-1) = \frac{1}{(-1)^{2m+1}} = -1$ și $f(x_2) = f(1) = 1$ și deci $f(x_1) < f(x_2)$.

Graficul funcției putere $f(x) = x^n$, pentru $n = -1$ și $n = -2$.

Funcția $f: \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^{-1}$.

Trasarea graficului se face prin „puncte”. Pentru aceasta asociem următorul tabel de valori:

x	$-\infty$	-100	-10	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{100}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{2}$	1	2	10	100	$+\infty$
$f(x) = x^{-1}$		$-\frac{1}{100}$	$-\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	-10	-100	100	10	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	

În acest tabel se vede că pentru valori din ce în ce mai mari ale lui $|x|$, $f(x)$ se „apropie” de zero, iar pentru valori din ce în ce mai mici ale lui $|x|$, $f(x)$ ia valori din ce în ce mai mari (în valoare absolută). Graficul funcției $f(x) = x^{-1}$ este schițat în figura V.3. Acest grafic se numește *hiperbolă*. El este constituit din două ramuri simetrice față de originea axelor (deoarece funcția $f(x) = x^{-1}$ este o funcție impară).

Funcția $f: \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^{-1}$.

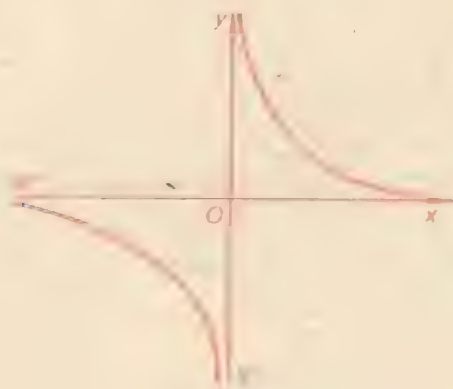


Fig. V.3

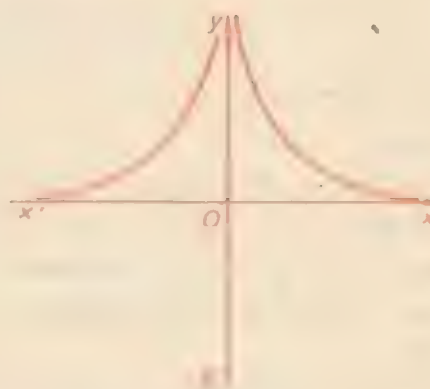


Fig. V.4

Pentru trasarea graficului, acestei funcții îi asociem următorul tabel de valori:

x	$-\infty$	-100	-10	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{100}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{2}$	1	2	10	100	$+\infty$
$f(x) = x^{-2}$		$\frac{1}{10\,000}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{4}$	1	4	100	$10\,000$	$10\,000$	100	4	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{10\,000}$	

Din acest tabel se vede că pentru valori ale lui x din ce în ce mai apropiate de 0 (pozitive sau negative) funcția f ia valori din ce în ce mai mari. Pentru valori ale lui $|x|$ din ce în ce mai mari, funcția f ia valori din ce în ce mai mici.

Graficul funcției $f(x) = x^{-2}$ este schițat în figura V.4.

Acest grafic este constituit din două ramuri simetrice față de axa $y'y$ (deoarece funcția $f(x) = x^{-2}$ este pară) situate deasupra axei $x'x$.

EXERCITII

- Să se calculeze: a) $2^2 \cdot 4^2 \cdot 8^2 \cdot \left(\frac{1}{16}\right)^2$; b) $5^3 \cdot 15^3 \cdot 25^3 \cdot \left(\frac{1}{125}\right)^3$; c) $\left[\left(-\frac{1}{3}\right)^5\right]^2$; d) $\frac{(-5)^{100}}{(-5)^{103}}$; e) $\left(-\frac{10}{17}\right)^5 \cdot \left(-\frac{51}{2}\right)^5 \cdot \left(-\frac{1}{15}\right)^5$; f) $\left[6 - 4\left(\frac{2}{3}\right)^9\right]^{-2}$.
- În raport cu valorile lui „ m ” să se determine semnul expresiilor: a) $(1 - m)^{13}$; b) $(2 - 3m)^{125}$; c) $(4 - 2m)^{102}$.
- Să se calculeze: a) $(x^5 y^3)^2$; $(x^3 y)^3$, ($x, y \neq 0$); b) $[a^3 + b^3 + 3ab(a + b)]^4 : (a^2 + b^2 + 2ab)^5$, ($a + b \neq 0$); c) $(10^n - 4^n) : (5^n - 2^n)$.
- Să se arate că: $a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a + b)(a^{2n} - a^{2n-1}b + a^{2n-2}b^2 + \dots - ab^{2n-1} + b^{2n})$.
- Să se arate că: $(a + b)(a^2 + b^2)(a^4 + b^4)(a^8 + b^8)(a^{16} + b^{16}) = \frac{a^{32} - b^{32}}{a - b}$ ($a \neq b$).
- Să se descompună în produs de doi factori: a) $x^{2m} + x^{m+n} + x^{m-n} + 1$ ($m > n$); b) $x^m(x^{n-1} - x^n(x^{m-1}))$.

7. Care dintre următoarele numere este mai mare:

a) 4^2 sau 2^6 ; b) 27^2 sau 9^6 ; c) 125^2 sau 25^3 ; d) 4^{300} sau 3^{400} ; e) $-\frac{1}{8}$ sau $\left(-\frac{1}{32}\right)^3$;

f) $\left(\frac{1}{16}\right)^{100}$ sau $\left(\frac{1}{2}\right)^{500}$; g) 5^{-63} sau 6^{-63} ; h) $\left(\frac{1}{5}\right)^{63}$ sau 5^{-63} ?

8. Să se reprezinte grafic funcțiile:

a) $f_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_1(x) = 2x^3$; b) $f_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_2(x) = x^3 - 1$;

c) $f_3: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_3(x) = (x - 1)^3$; d) $f_4: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_4(x) = (x + 2)^4$;

e) $f_5: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_5(x) = |x^3|$; f) $f_6: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_6(x) = |(x - 1)^3|$.

9. Să se arate că funcția putere $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^{2m}$ nu este nici injectivă, nici surjectivă.

10. Să se arate că funcția putere $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^{2m+1}$ este injectivă.

11. Să se scrie, folosind exponentul negativ

a) $\frac{1}{a^3b^4}$; $\frac{1}{(a+b)^3(a^2-b^2)^2}$; $\frac{3}{a^5b^6c^2}$; ($a, b, c \neq 0$; $|a| \neq |b|$);

b) 0,0002; 0,000003; 0,0015.

12. Să se efectueze: a) $(a^{-2} + 1)(a^4 - a^{-2} + 1)$ ($a \neq 0$);

b) $(a^{-2} + 1)^2 - (a^{-2} - 1)^2$, ($a \neq 0$), c) $a(a+b)^{-1} + b(a+b)^{-1}$, ($a+b \neq 0$).

13. Să se reprezinte grafic funcțiile:

a) $f_1: \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, f_1(x) = x^{-3} + 1$; b) $f_2: \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, f_2(x) = x^{-2} - 1$;

c) $f_3: \mathbb{R} - \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}, f_3(x) = \frac{1}{x+1}$; d) $f_4: \mathbb{R} - \{1\} \rightarrow \mathbb{R}, f_4(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$

§2. RADICALI

Fie $n \geq 2$ un număr natural, iar a un număr real. Să considerăm ecuația

$$x^n - a = 0. \quad (1)$$

În continuare ne punem problema existenței și a numărului rădăcinilor (soluțiilor) reale ale acestei ecuații. Amintim că o *rădăcină reală* a ecuației (1) este un număr real α , astfel încît $\alpha^n - a = 0$.

2.1. Radicalul unui număr pozitiv

1. Fie ca mai sus $n \geq 2$ un număr natural, $a > 0$ un număr real pozitiv și ecuația $x^n - a = 0$. Atunci avem

Teoremă. Ecuația

$$x^n - a = 0 \quad (n \in \mathbb{N}, n \geq 2; a \in \mathbb{R}, a > 0) \quad (2)$$

are o rădăcină reală pozitivă și numai una.

Demonstrația riguroasă a faptului că există o rădăcină pozitivă a ecuației (2) depășește programa clasei a IX-a. Ea necesită noțiunea de continuitate și se va face la Analiză matematică în clasa a XI-a. Vom indica totuși mai jos pe un exemplu (exemplul 2) cum poate fi găsită o valoare aproximativă a rădăcinii pozitive a unei astfel de ecuații.

Să demonstrăm acum unicitatea. Într-adevăr, să presupunem prin absurd, că ecuația (2) ar avea mai multe rădăcini pozitive diferite. Fie atunci x_1 și x_2 , $x_1 \neq x_2$ două astfel de rădăcini, adică

$$x_1^n = x_2^n = a. \quad (3)$$

Cum $x_1 \neq x_2$, atunci unul dintre aceste numere este mai mic decât celălalt. Fie, de exemplu, $x_1 < x_2$. Dar funcția putere fiind strict crescătoare pe $[0, \infty)$ (după cum am arătat în § 2) rezultă că $x_1^n < x_2^n$, ceea ce contrazice relația (3). Această contradicție arată că există o singură rădăcină pozitivă a ecuației (2).

Cu alte cuvinte, teorema precedentă spune că *pentru orice număr real pozitiv $a > 0$ și orice număr natural $n \geq 2$, există un unic număr real pozitiv cu proprietatea că puterea a n -a a sa să fie a .*

Atunci putem da următoarea definiție:

Definiție. Dacă $a > 0$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, se numește *radical de ordin n din a* , numărul pozitiv a cărui putere a n -a este a .

Conform teoremei precedente există un astfel de număr și este unic.

Notăție: Vom nota radicalul de ordin n din a prin $\sqrt[n]{a}$. Pentru $\sqrt[2]{a}$, de obicei, se omite 2 și se scrie, simplu, \sqrt{a} .

Așadar, $\sqrt[n]{a}$ este un număr care verifică relațiile:

$$\sqrt[n]{a} > 0, (\sqrt[n]{a})^n = a \quad (a > 0).$$

Exemple: 1) $\sqrt[3]{9} = 3$; $\sqrt[3]{125} = 5$; $\sqrt[4]{16} = 2$; $\sqrt[5]{32} = 2$; $\sqrt[4]{81} = 3$.

2) Să arătăm, acum, cum poate fi găsită o valoare aproximativă a numărului $\sqrt[3]{2}$. Deoarece $1 = 1^3 < 2 < 2^3 = 8$, rezultă că $1 < \sqrt[3]{2} < 2$ și deci 1, respectiv 2 sînt valorile aproximative prin lipsă, respectiv prin adaos, ale lui $\sqrt[3]{2}$, cu o eroare mai mică decât 1. Ca să găsim valorile aproximative cu o eroare mai mică decât 0,1 ale lui $\sqrt[3]{2}$, procedăm în modul următor. Scriem șirul de numere

$$1,0; 1,1; 1,2; 1,3; 1,4; 1,5; 1,6; 1,7; 1,8; 1,9; 2,0.$$

Căutăm în acest șir două numere consecutive, astfel încît cubul primului dintre ele să fie mai mic decât 2, iar cubul celui de-al doilea să fie mai mare decât 2.

Pentru aceasta să ridicăm la cub numărul din mijloc.

Obținem $1,5^3 = 3,375$, care este mai mare decât 2. Deoarece toate numerele de la dreapta lui 1,5 prin ridicare la cub dau numere mai mari decât 2, perechea de numere căutată va fi printre numerele

$$1,1; 1,2; 1,3; 1,4.$$

Ridicăm la cub pe 1,2 și obținem 1,728 care este mai mic decât 2, și deci cubul lui 1,1 va fi și mai mic. Calculăm atunci cubul lui 1,3 și obținem $(1,3)^3 = 2,197$ care este mai

mare decât 2. Deci $1,2 < \sqrt[3]{2} < 1,3$. Așadar 1,2 respectiv 1,3, vor fi valorile aproximative prin lipsă, respectiv prin adaos ale lui $\sqrt[3]{2}$, cu o eroare mai mică decât 0,1.

Dacă vrem să găsim valorile aproximative cu o eroare mai mică decât 0,01 ale lui $\sqrt[3]{2}$, procedăm ca mai înainte pentru șirul de numere următor:

$$1,21; 1,22; 1,23; 1,24; \dots; 1,29.$$

Deoarece $(1,25)^3 = 1,953125$ este mai mic decât 2, o să luăm în considerare numai numerele:

$$1,26; 1,27; 1,28; 1,29.$$

Cum $(1,26)^3 = 2,00376$ este mai mare decât 2, avem $1,25 < \sqrt[3]{2} < 1,26$. Așadar 1,25 respectiv 1,26 vor fi valorile aproximative prin lipsă, respectiv prin adaos, ale lui $\sqrt[3]{2}$, cu o eroare mai mică decât 0,01.

Continuând procedeul putem găsi valori aproximative ale lui $\sqrt[3]{2}$, cu o eroare oricât de mică dorim.

În general, ecuația $x^n - a = 0$ ($a > 0$) poate să aibă și alte rădăcini (care evident trebuie să fie negative). De exemplu, ecuația $x^2 - 4 = 0$ are rădăcinile $x_1 = -2 < 0$ și $x_2 = 2 > 0$. În acest sens avem în general:

1° Dacă $n = 2k + 1$, atunci ecuația $x^{2k+1} - a = 0$ ($a > 0$) nu are rădăcini negative.

Această afirmație rezultă ușor observind că oricare ar fi $\alpha < 0$ avem $\alpha^{2k+1} < 0$ și deci $\alpha^{2k+1} \neq a$ ($a > 0$).

2° Dacă $n = 2k$ atunci ecuația $x^{2k} - a = 0$ ($a > 0$) are o singură rădăcină negativă și anume $-\sqrt[2k]{a}$.

Într-adevăr, avem $(-\sqrt[2k]{a})^{2k} = (\sqrt[2k]{a})^{2k} = a$ și deci $-\sqrt[2k]{a}$ este o rădăcină a ecuației $x^{2k} - a = 0$. Un raționament analog celui folosit la demonstrarea unicității în teorema precedentă, ne arată că $-\sqrt[2k]{a}$ este unica rădăcină negativă.

Prin definiție, avem $\sqrt[n]{0} = 0$ ($n \geq 2$, număr natural).

Evident, $\sqrt[n]{0} = 0$ este unica rădăcină a ecuației $x^n = 0$.

Observație. Având în vedere definiția radicalului, mai precis că radicalul unui număr pozitiv (sau nul) este pozitiv (sau nul) este folositor de remarcat următoarea formulă importantă:

$$\sqrt{x^2} = \begin{cases} x, & \text{dacă } x > 0; \\ 0, & \text{dacă } x = 0; \\ -x, & \text{dacă } x < 0. \end{cases}$$

Cu alte cuvinte, $\sqrt{x^2} = |x|$.

$$\text{Exemple: } 1) \sqrt{(2-a)^2} = |2-a| = \begin{cases} 2-a, & \text{dacă } a < 2; \\ 0, & \text{dacă } a = 2; \\ a-2, & \text{dacă } a > 2. \end{cases}$$

$$2) \sqrt{(x^2+1)^2} = |x^2+1| = x^2+1,$$

deoarece pentru orice x , avem $x^2+1 > 0$.

2. *Funcția radical*. Fie $n \geq 2$ un număr natural. În paragraful precedent definind noțiunea de radical de ordin n , fiecărui număr pozitiv (sau nul) a i s-a asociat un număr bine determinat, pozitiv (sau nul) $\sqrt[n]{a}$.

Astfel am obținut o funcție

$$f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty), f(x) = \sqrt[n]{x}.$$

Această funcție se numește *funcție radical*. Iată oteva proprietăți ale funcției radical:

1° Funcția radical este *strict crescătoare*.

Într-adevăr fie $x_1, x_2 \in [0, \infty)$, astfel încît $x_1 < x_2$. Deoarece $x_1 = (\sqrt[n]{x_1})^n$ și $x_2 = (\sqrt[n]{x_2})^n$, avem $(\sqrt[n]{x_1})^n < (\sqrt[n]{x_2})^n$. Dar funcția putere fiind strict crescătoare pe $[0, \infty)$ (după cum am văzut în § 1.2) rezultă că $\sqrt[n]{x_1} < \sqrt[n]{x_2}$ adică $f(x_1) < f(x_2)$.

2° Funcția radical este *bijectivă*.

Deoarece funcția radical este strict crescătoare (proprietatea 1°) rezultă că ea este injectivă. Într-adevăr, fie $x_1, x_2 \in [0, \infty)$, astfel încît $x_1 \neq x_2$. Atunci avem $x_1 < x_2$ sau $x_1 > x_2$. Dacă presupunem, de exemplu, că $x_1 < x_2$, rezultă $f(x_1) < f(x_2)$ și deci $f(x_1) \neq f(x_2)$. Analog, dacă $x_1 > x_2$. Deci f este injectivă. Fie, acum, $y \in [0, \infty)$ atunci $f(y^n) = \sqrt[n]{y^n} = y$. Deci f este surjectivă.

Observații. 1) Deoarece funcția radical

$$f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty), f(x) = \sqrt[n]{x}$$

este bijectivă (proprietatea 2°), rezultă (vezi teorema, § 3.7, din cap. II) că ea este *inversabilă*.

Din relațiile: $\sqrt[n]{x^n} = x$ și $\sqrt[n]{y^n} = y$ ($x \geq 0, y \geq 0$) rezultă că inversa sa nu este alta decît funcția

$$g: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty); g(x) = x^n$$

(a nu se confunda funcția g cu funcția putere, ele neavînd același domeniu de definiție).

Într-adevăr, $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt[n]{x}) = (\sqrt[n]{x})^n = x, x \in [0, \infty)$.

$$(f \circ g)(y) = f(g(y)) = f(y^n) = \sqrt[n]{y^n} = y, y \in [0, \infty).$$

2) Din pct. 1) rezultă că g este inversabilă și conform teoremei din § 3.7, cap. II, este deci bijectivă.

3. *Graficul funcției radical $f(x) = \sqrt[n]{x}$ pentru $n = 2, 3$.*

1) Funcția $f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty), f(x) = \sqrt[n]{x}$. Din proprietățile 1° și 2° de mai sus rezultă, în particular, că funcția f este strict crescătoare și bijectivă. Graficul acestei funcții (construit prin „puncte”) este reprezentat în figura V.5.



Fig. V.5

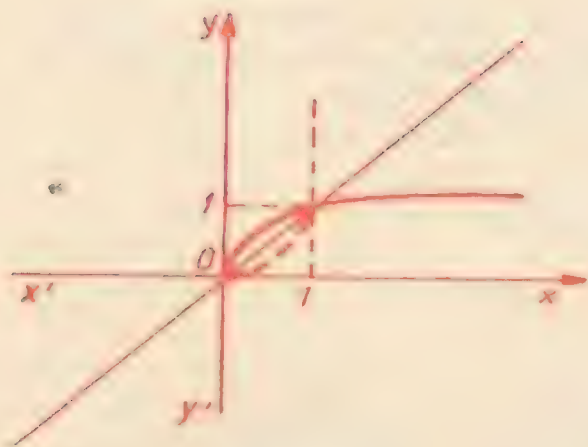


Fig. V.6

2) Funcția $f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, $f(x) = \sqrt[3]{x}$. De asemenea, această funcție este strict crescătoare și bijectivă. Graficul său (construit prin „puncte”) este reprezentat în fig. V.6.

Se observă din aceste figuri că graficele celor două funcții radical considerate sînt asemănătoare.

În cele două figuri am reprezentat prin linie întreruptă graficul funcției inverse. Cele două grafice (al funcției f și al inversei sale g) sînt simetrice față de prima bisecătoare (vezi § 3.7, cap. II).

2.2. Radicalul (de ordin impar) al unui număr negativ

Fie $n \geq 2$ un număr natural, $a < 0$ un număr real negativ și ecuația $x^n - a = 0$. Atunci avem:

Teoremă. Fiind dată ecuația:

$$x^n - a = 0 \quad (n \in \mathbb{N}, n \geq 2; a \in \mathbb{R}, a < 0) \quad (1)$$

avem:

1° Dacă $n = 2k$ ($k \geq 1$), ecuația (1) nu are rădăcini reale.

2° Dacă $n = 2k + 1$ ($k \geq 1$), ecuația (1) are o rădăcină reală negativă și numai una.

Demonstrație. Afirmația 1° rezultă ușor observînd că, oricare ar fi $\alpha \in \mathbb{R}$ avem $\alpha^{2k} = (\alpha^2)^k > 0$ și deci $x^{2k} \neq a$ ($a < 0$), adică $\alpha^{2k} - a \neq 0$.

Să demonstrăm acum 2°. Fie pentru aceasta $y = -x$. Cum $y^{2k+1} = (-x)^{2k+1} = -x^{2k+1}$, ecuația devine $-y^{2k+1} - a = 0$, sau încă $y^{2k+1} - (-a) = 0$.

Cum $a < 0$ rezultă $-a > 0$ și după teorema din § 2.1, rezultă că ecuația în y are o rădăcină reală pozitivă unică. Aceasta este tocmai $\sqrt[2k+1]{-a}$ ($-a > 0$). Dar, atunci este clar că ecuația în x are o rădăcină negativă unică și anume $x = -\sqrt[2k+1]{-a}$ ($-a > 0$).

Avînd în vedere afirmația 2° a teoremei precedente putem da următoarea definiție:

Definiție. Dacă $a < 0$, $n \in \mathbb{N}$ și $n \geq 3$ este un număr impar, se numește radical de ordin n din a , numărul negativ a cărui putere a n -a este a .

Un astfel de număr există și este unic. Îl notăm prin $\sqrt[n]{a}$. Așadar $\sqrt[n]{a}$ ($a < 0$, $n \geq 3$, impar) este un număr care verifică relațiile: $\sqrt[n]{a} < 0$, $(\sqrt[n]{a})^n = a$.

Din considerațiile anterioare rezultă:

Dacă $a < 0$, $n = 2k + 1$, atunci $\sqrt[n]{a} = -\sqrt[n]{-a}$.

Exemple: 1) Ecuațiile $x^4 + 81 = 0$ și $x^{100} + 125 = 0$ nu au rădăcini reale.

2) Ecuațiile $x^5 + 32 = 0$ și $x^3 + 125 = 0$ au câte o singură rădăcină reală negativă și anume:

$$\sqrt[5]{-32} = -2, \text{ respectiv } \sqrt[3]{-125} = -5.$$

Observație. Pentru un număr natural impar, $n = 2k + 1$, am definit radicalul de ordin n din orice număr real a fără a pune condiția ca $a \geq 0$. Astfel se obține o funcție

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt[n]{x}.$$

Această funcție este *inversabilă*, inversa sa fiind funcția putere $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = x^n$.

2.3. Proprietățile radicalilor

În cele ce urmează vom vedea că radicalii au o serie de proprietăți asemănătoare puterilor.

Amintim, la început, că dacă x și y sînt numere reale, iar n un număr natural nenul, atunci $x^n y^n = (xy)^n$.

De asemenea, dacă $x, y \geq 0$ sînt numere reale, iar n este un număr natural nenul, atunci din $x^n = y^n$ rezultă $x = y$ (vezi, de exemplu, observația din § 2.1 pct. 2).

În cele ce urmează m, n, k vor fi numere naturale nenule, iar atunci cînd ele indică ordinul unui radical, vor fi mai mari sau egale decît 2.

1. Oricare ar fi numerele reale $a, b \geq 0$, atunci

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b}. \quad (1)$$

Într-adevăr, fie $x = \sqrt[n]{ab}$ și $y = \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b}$. Atunci $x \geq 0, y \geq 0$ și $x^n = (\sqrt[n]{ab})^n = ab, y^n = (\sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b})^n = (\sqrt[n]{a})^n (\sqrt[n]{b})^n = ab$. Deci $x^n = y^n$, de unde $x = y$, ceea ce trebuia demonstrat.

Cerința $a \geq 0$ și $b \geq 0$ este esențială numai pentru n par.

Dacă n este impar, formula (1) este valabilă pentru orice numere reale a și b (inclusiv negative).

Exemple: $\sqrt{25 \cdot 49} = \sqrt{25} \sqrt{49} = 5 \cdot 7 = 35;$

$$\sqrt[3]{-125 \cdot 8} = \sqrt[3]{-125} \sqrt[3]{8} = -5 \cdot 2 = -10.$$

Remarcăm că formula (1) rămîne adevărată pentru orice număr finit de numere $a_1, a_2, \dots, a_k \geq 0$ ($k \geq 2$), adică

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_k} = \sqrt[n]{a_1} \sqrt[n]{a_2} \dots \sqrt[n]{a_k}. \quad (2)$$

2. Oricare ar fi numerele reale $a \geq 0, b > 0$, atunci

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}. \quad (3)$$

Într-adevăr, fie $x = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$, $y = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$. Atunci $x \geq 0$, $y \geq 0$ și $x^n = \left(\sqrt[n]{\frac{a}{b}}\right)^n = \frac{a}{b}$ și $y^n = \left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n = \frac{(\sqrt[n]{a})^n}{(\sqrt[n]{b})^n} = \frac{a}{b}$. Deci $x^n = y^n$, de unde $x = y$, ceea ce trebuia demonstrat.

Cerința $a \geq 0$ și $b > 0$ este esențială numai pentru n număr par.

Dacă n este impar formula (3) este valabilă pentru orice număr real a și orice număr real $b \neq 0$.

Exemple: $\sqrt{\frac{36}{49}} = \frac{\sqrt{36}}{\sqrt{49}} = \frac{6}{7}$; $\sqrt[3]{\frac{-64}{27}} = -\sqrt[3]{\frac{64}{27}} = -\frac{\sqrt[3]{64}}{\sqrt[3]{27}} = -\frac{4}{3}$.

3. Oricare ar fi numărul real $a \geq 0$, atunci

$$\sqrt[n]{a^{nm}} = a^m. \quad (4)$$

Într-adevăr,

$$\sqrt[n]{a^{nm}} = \sqrt[n]{(a^n)^m} = \underbrace{\sqrt[n]{a^n} \cdot \sqrt[n]{a^n} \cdot \dots \cdot \sqrt[n]{a^n}}_{m \text{ ori}} = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{m \text{ ori}} = a^m.$$

Exemple: $\sqrt[3]{4^6} = \sqrt[3]{4^{3 \cdot 2}} = 4^2 = 16$; $\sqrt[4]{2^{12}} = \sqrt[4]{2^{4 \cdot 3}} = 2^3 = 8$.

4. Oricare ar fi numărul real $a \geq 0$, atunci

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}. \quad (5)$$

Într-adevăr

$$(\sqrt[n]{a})^m = \underbrace{\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a} \cdot \dots \cdot \sqrt[n]{a}}_{m \text{ ori}} = \sqrt[n]{\underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{m \text{ ori}}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Dacă n este impar, formula (4) este valabilă și pentru $a < 0$.

Exemple: $(\sqrt[4]{3})^3 = \sqrt[4]{3^3} = \sqrt[4]{27}$; $(\sqrt[6]{16})^3 = \sqrt[6]{2^{12}} = 2^2 = 4$;

$$(\sqrt[3]{-2})^5 = \sqrt[3]{(-2)^5} = \sqrt[3]{-32}.$$

5. Oricare ar fi numărul real $a \geq 0$, atunci:

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nk]{a^{mk}}. \quad (6)$$

Într-adevăr, fie $x = \sqrt[nk]{a^{mk}}$ și $y = \sqrt[n]{a^m}$. Atunci $x \geq 0$, $y \geq 0$ și $x^n = (\sqrt[nk]{a^{mk}})^n = \sqrt[nk]{a^{(nk)m}} = a^m$ și $y^n = (\sqrt[n]{a^m})^n = a^m$. Deci $x^n = y^n$, de unde $x = y$, ceea ce trebuia demonstrat.

Exemple: $\sqrt[4]{5} = \sqrt[12]{5^3}$; $\sqrt[25]{a^{10}} = \sqrt[5]{a^2}$.

6. Oricare ar fi numărul real $a \geq 0$, atunci

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}.$$

Intr-adevăr, fie $x = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$ și $y = \sqrt[mn]{a}$. Atunci $x \geq 0$ și $y \geq 0$. După proprietățile 4 și 5 avem $y^n = (\sqrt[mn]{a})^n = \sqrt[m]{a^n} = \sqrt[m]{a}$. Cum $x^n = \sqrt[m]{a}$, după definiția radicalului de ordin n rezultă că $y = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$. Deci $y = x$, ceea ce trebuia demonstrat.

Exemple: $\sqrt[3]{\sqrt[4]{2}} = \sqrt[12]{2}$; $\sqrt[3]{\sqrt[5]{7}} = \sqrt[15]{7}$.

2.4. Operații cu radicali

1. *Scoaterea unui factor de sub semnul radical și introducerea unui factor sub semnul radical.*

Uneori numărul de sub semnul radical se descompune în factori, pentru care radicalul este ușor de calculat. În aceste cazuri, expresia radicalului devine mai simplă (se simplifică), dacă scoatem acești factori de sub semnul radical. În efectuarea unei astfel de operații, ne bazăm pe proprietățile 1 și 3 ale radicalilor.

De exemplu: $\sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = \sqrt{4} \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$;

$$\sqrt[4]{1250} = \sqrt[4]{625 \cdot 2} = \sqrt[4]{5^4 \cdot 2} = \sqrt[4]{5^4} \sqrt[4]{2} = 5\sqrt[4]{2};$$

$$\sqrt[4]{2a^{12}} = |a^3| \sqrt[4]{2}.$$

Uneori este folositor să introducem factori sub semnul radical. Pentru efectuarea unei astfel de operații ne bazăm pe aceleași proprietăți menționate mai sus.

De exemplu: $\sqrt[3]{16\sqrt{2}} = \sqrt[3]{\sqrt[4]{16^3 \cdot 2}} = \sqrt[3]{\sqrt[4]{2^8 \cdot 2}} = \sqrt[3]{\sqrt[4]{2^9}} = \sqrt[6]{2^9} = \sqrt[2]{2^3} = 2\sqrt{2}.$

2. *Înmulțirea radicalilor.* Proprietatea 1 a radicalilor ne dă legea de înmulțire a radicalilor de același ordin:

$$\sqrt[n]{a_1} \cdot \sqrt[n]{a_2} \cdot \dots \cdot \sqrt[n]{a_h} = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_h}. \quad (1)$$

Ca să înmulțim radicali de ordine diferite, este necesar să-i aducem la același ordin și, apoi, să-i înmulțim după formula (1). Fie, de exemplu, $\sqrt[n]{a}$ și $\sqrt[m]{b}$. Folosind proprietatea 5 a radicalilor avem:

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[nm]{a^m}; \quad \sqrt[m]{b} = \sqrt[nm]{b^n}.$$

Atunci $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{b} = \sqrt[nm]{a^m} \cdot \sqrt[nm]{b^n} = \sqrt[nm]{a^m \cdot b^n}.$

De exemplu: $\sqrt{3} \sqrt[3]{9} = \sqrt[6]{3^3} \sqrt[6]{9^2} = \sqrt[6]{3^3 \cdot 9^2} = \sqrt[6]{3^3 \cdot 3^4} = \sqrt[6]{3^7} = 3\sqrt[6]{3}$

Observăm că se poate lua ca ordin comun al radicalilor $\sqrt[n]{a}$ și $\sqrt[m]{b}$, tocmai cel mai mic multiplu comun al numerelor n și m .

De exemplu, putem lua ca ordin comun pentru radicalii $\sqrt[4]{2}$ și $\sqrt[6]{32}$ pe 12, care este cel mai mic multiplu comun al numerelor 4 și 6. Atunci avem:

$$\sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[6]{32} = \sqrt[12]{2^3} \cdot \sqrt[12]{2^{10}} = \sqrt[12]{2^{13}} = 2 \sqrt[12]{2}.$$

3. *Împărțirea radicalilor.* Proprietatea 2 a radicalilor ne dă legea de împărțire a radicalilor de același ordin:

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}. \quad (2)$$

Ca să împărțim radicali de ordine diferite, îi aducem mai întâi la același ordin și apoi îi împărțim după formula (2).

De exemplu: $\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt[6]{4^2}}{\sqrt[6]{2^3}} = \sqrt[6]{\frac{2^4}{2^3}} = \sqrt[6]{2}.$

4. *Raționalizarea numitorilor.* Înțelegem prin raționalizarea numitorilor, operația de eliminare (prin transformări) a radicalilor de la numitorul unei fracții. Vom clarifica aceasta prin câteva cazuri speciale, pe care le vom prezenta mai jos.

Să precizăm mai întâi noțiunea de *expresie conjugată*. Astfel, o expresie care conține radicali se numește *conjugată* unei alte expresii care conține radicali, dacă produsul acestor expresii se poate scrie fără radicali. Atunci cele două expresii se numesc *conjugate*.

În cazurile următoare, raționalizarea numitorului se realizează prin amplificarea fracției cu conjugata numitorului. De aceea vom pune în evidență pentru fiecare caz în parte, conjugatele numitorului.

1° *Numitorul este un radical.* În acest caz radicalul de la numitor se elimină printr-o amplificare.

De exemplu: $\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}; \quad \frac{5}{\sqrt[3]{12}} = \frac{5\sqrt[3]{2 \cdot 3^2}}{\sqrt[3]{2^3 \cdot 3^3}} = \frac{5\sqrt[3]{18}}{6}.$

2° *Numitorul este de forma: $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$ ($a, b > 0$).*

Observăm că $(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = a - b$. Expresiile $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ și $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ sînt conjugate. Pentru a raționaliza numitorul amplificăm fracția cu conjugata numitorului.

De exemplu:

$$\frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2}{(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2})} = \frac{3 - 2\sqrt{6} + 2}{3 - 2} = 5 - 2\sqrt{6}.$$

3° *Numitorul este de forma $\sqrt{a} \pm \sqrt{b} \pm \sqrt{c}$ ($a, b, c > 0$).* În acest caz, radicalii de la numitor se elimină succesiv, reducînd problema la cazul precedent.

De exemplu:

$$\begin{aligned} \frac{4}{1 + \sqrt{3} - \sqrt{2}} &= \frac{4[(1 + \sqrt{3}) + \sqrt{2}]}{[(1 + \sqrt{3}) - \sqrt{2}][(1 + \sqrt{3}) + \sqrt{2}]} = \frac{4(1 + \sqrt{3} + \sqrt{2})}{(1 + \sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2} = \\ &= \frac{4(1 + \sqrt{3} + \sqrt{2})}{(4 + 2\sqrt{3}) - 2} = \frac{4(1 + \sqrt{3} + \sqrt{2})}{2 + 2\sqrt{3}} = \frac{2(1 + \sqrt{3} + \sqrt{2})}{1 + \sqrt{3}} = \\ &= \frac{2(1 + \sqrt{3} + \sqrt{2})(1 - \sqrt{3})}{(1 + \sqrt{3})(1 - \sqrt{3})} = \frac{2(1 - \sqrt{3} + \sqrt{3} - 3 + \sqrt{2} - \sqrt{6})}{1 - 3} = \\ &= 2 - \sqrt{2} + \sqrt{6}. \end{aligned}$$

4° Numitorul este de forma $\sqrt[3]{a} \pm \sqrt[3]{b}$ sau $\sqrt[3]{a^2} \pm \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}$.
Avem:

$$(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}) = a + b \text{ și}$$

$$(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}) = a - b$$

acestea fiind perechi de expresii conjugate.

Exemplu:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{3}} &= \frac{\sqrt[3]{3}(\sqrt[3]{5^2} + \sqrt[3]{5 \cdot 3} + \sqrt[3]{3^2})}{(\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{3})(\sqrt[3]{5^2} + \sqrt[3]{5 \cdot 3} + \sqrt[3]{3^2})} = \\ &= \frac{\sqrt[3]{3 \cdot 5^2} + \sqrt[3]{3^2 \cdot 5} + \sqrt[3]{3^3}}{5 - 3} = \frac{3 + \sqrt[3]{45} + \sqrt[3]{75}}{2}. \end{aligned}$$

Cazul 4° se poate da mai general, astfel:

5° Numitorul este de forma $\sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b}$ sau $\sqrt[n]{a^{n-1}} + \sqrt[n]{a^{n-2}b} + \dots + \sqrt[n]{b^{n-1}}$.

Avem $(\sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b})(\sqrt[n]{a^{n-1}} + \sqrt[n]{a^{n-2}b} + \dots + \sqrt[n]{b^{n-1}}) = a - b$
acestea fiind deci expresii conjugate.

6° Numitorul este de forma $\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$ sau $\sqrt[n]{a^{n-1}} - \sqrt[n]{a^{n-2}b} + \dots - \sqrt[n]{ab^{n-2}} + \sqrt[n]{b^{n-1}}$, unde $n = 2k + 1$, este impar. Avem:

$(\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b})(\sqrt[n]{a^{n-1}} - \sqrt[n]{a^{n-2}b} + \dots - \sqrt[n]{ab^{n-2}} + \sqrt[n]{b^{n-1}}) = a + b$ ($n = 2k + 1$)
acestea fiind deci conjugate.

2.5. Ecuații iraționale

1. Se numesc *ecuații iraționale*, ecuațiile care conțin necunoscuta sub semnul radical. Așa, de exemplu, ecuațiile

$$\sqrt{x-2} = 5 + \sqrt{x}; \quad \sqrt{x} = 1 - 2x;$$

$$\sqrt[3]{4-x} = \sqrt[4]{x+10} + 5x; \text{ ș.a.}$$

Amintim că radicalii de ordin par sînt definiți numai pentru numere nenegative, aceștia fiind de asemenea numere nenegative. Să considerăm, de exemplu, ecuațiile iraționale:

1° $\sqrt{x-3} + \sqrt{2-x} = 3$. Cum radicalii de ordinul doi sînt definiți numai pentru numere nenegative, rezultă că soluțiile ecuației trebuie să verifice sistemul de inecuații:

$$x - 3 \geq 0; 2 - x \geq 0. \quad (1)$$

De aici rezultă: $x \geq 3$ și $x \leq 2$ și deci sistemul (1) evident nu are soluții. Așadar, ecuația dată nu are soluții reale.

2° $\sqrt{x} + \sqrt{3-x} = -5$. Cum \sqrt{x} și $\sqrt{3-x}$ sînt nenegative, avem $\sqrt{x} + \sqrt{3-x} \geq 0$ pentru x real. Însă $-5 < 0$ și deci ecuația nu are soluții reale.

Observație. Cele două exemple precedente ne arată că este necesar ca înainte de a trece la găsirea, prin diferite metode, a soluțiilor unei ecuații iraționale, să ne asigurăm dacă astfel de soluții pot să existe.

2. *Metode de rezolvare a ecuațiilor iraționale.* Calea obișnuită de rezolvare a ecuațiilor iraționale constă în eliminarea radicalilor, prin diferite transformări, reducîndu-le astfel la ecuații deja studiate (de exemplu, de gradul întii sau al doilea). Mai jos prezentăm cîteva exemple de ecuații iraționale a căror rezolvare se poate efectua prin ridicarea la putere sau înmulțire cu expresii conjugate.

Exemplul 1. Să se rezolve ecuația:

$$x = \sqrt{2-x}. \quad (2)$$

Pentru ca radicalul să existe trebuie ca $2 - x \geq 0$, de unde $x \leq 2$. Deci soluțiile ecuației trebuie să verifice această inegalitate. Ridicăm acum ambii membri ai ecuației la pătrat și obținem: $x^2 = 2 - x$ sau $x^2 + x - 2 = 0$, de unde $x_1 = -2$ și $x_2 = 1$.

Cu toate că $x_1 \leq 2$ și $x_2 \leq 2$, nu putem trage încă concluzia că acestea sînt rădăcini ale ecuației (2).

Aceasta pentru că la același rezultat am fi ajuns (prin ridicare la pătrat, membru cu membru) chiar dacă am fi considerat ecuația irațională $x = -\sqrt{2-x}$, care evident este diferită de ecuația dată (2). Deci printre rădăcinile ecuației obținute prin ridicare la pătrat (membru cu membru) a ecuației (2) se găsesc și rădăcinile ecuației $x = -\sqrt{2-x}$, care pot să nu fie rădăcini ale ecuației (2). De aceea, trebuie să verificăm dacă, într-adevăr, $x_1 = -2$ și $x_2 = 1$ sînt rădăcini ale ecuației iraționale date. Pentru $x = -2$, membrul stîng al ecuației (2) are valoarea -2 , iar cel drept $\sqrt{4} = 2$. Cum $-2 \neq 2$, rezultă că -2 nu este rădăcină a ecuației (2). Pentru $x = 1$, ambii membri ai ecuației (2) iau valoarea 1. Deci 1 este rădăcină a ecuației iraționale date.

Exemplul 2. Să se rezolve ecuația:

$$\sqrt{x-5} + \sqrt{10-x} = 3. \quad (3)$$

Din condițiile de existență a radicalilor rezultă că soluțiile ecuației verifică inegalitatea $5 \leq x \leq 10$. Prin ridicare la pătrat se obține:

$$x - 5 + 2\sqrt{(x-5)(10-x)} + 10 - x = 9, \text{ sau} \\ 2\sqrt{(x-5)(10-x)} = 4, \text{ sau } \sqrt{(x-5)(10-x)} = 2$$

Printr-o nouă ridicare la pătrat se obține:

$$(x - 5)(10 - x) = 4 \text{ sau } -x^2 + 15x - 50 = 4 \text{ sau } x^2 - 15x + 54 = 0.$$

Această ecuație are rădăcinile: $x_1 = 6$, $x_2 = 9$, deci cuprinse între 5 și 10. Verificarea arată că atât 6 cât și 9 sînt rădăcini ale ecuației date.

Exemplul 3. Să se rezolve ecuația:

$$\sqrt{x+7} + \sqrt{x-1} = 4. \quad (4)$$

Din condițiile de existență a radicalilor rezultă $x \geq 1$.

Să rezolvăm această ecuație prin înmulțirea ambilor membri cu expresia conjugată a membrului stîng, adică cu $\sqrt{x+7} - \sqrt{x-1}$. Astfel obținem:

$$(\sqrt{x+7} + \sqrt{x-1})(\sqrt{x+7} - \sqrt{x-1}) = 4(\sqrt{x+7} - \sqrt{x-1}), \text{ de unde}$$

$$(x+7) - (x-1) = 4(\sqrt{x+7} - \sqrt{x-1}).$$

$$\text{De aici, avem } \sqrt{x+7} - \sqrt{x-1} = 2. \quad (5)$$

Adunînd membru cu membru ecuațiile (4) și (5) se obține $2\sqrt{x+7} = 6$, de unde $x+7 = 9$, adică $x = 2$. Prin verificare, se obține că 2 este o rădăcină a ecuației date.

Observație. Prin metodele de rezolvare a ecuațiilor iraționale, indicate în exemplele de mai sus, nu se pot pierde rădăcini ale ecuației iraționale date. Dimpotrivă, ecuația (fără radicali) la care se ajunge prin transformări ale ecuației iraționale date, poate avea și alte rădăcini. De aceea remarcăm din nou necesitatea de a verifica dacă rădăcinile ecuației obținute (prin transformări) sînt rădăcini ale ecuației iraționale date (în forma inițială) această etapă făcînd parte din însăși rezolvarea ecuațiilor iraționale.

2.6. Puteri cu exponent rațional

În acest paragraf vom prezenta o extindere a noțiunii de putere, care cuprinde în particular, atât noțiunea de putere cu exponent întreg, cât și cea de radical.

1. Puteri cu exponent rațional pozitiv

Definiție. Fie $a \geq 0$ un număr real nenegativ și $\frac{m}{n}$ un număr rațional pozitiv, atunci definim

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \quad (1)$$

(citim a la puterea $\frac{m}{n}$).

Observăm că în această definiție intervin numerele naturale m și n care definesc numărul rațional dat.

Cum numărul rațional $\frac{m}{n} > 0$ este egal, de exemplu, cu numărul rațional $\frac{km}{kn}$, pentru k număr natural nenul, se pune în mod firesc problema de a arăta că această definiție este corectă, adică nu depinde de alegerea reprezentanților.

Cu alte cuvinte, trebuie arătat că dacă $\frac{m}{n} = \frac{m'}{n'}$, atunci $a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m'}{n'}}$.

Într-adevăr, avem $\frac{m}{n} = \frac{m'}{n'}$ dacă și numai dacă $mn' = m'n$.

Atunci folosind proprietatea 5 a radicalilor, avem

$$a^{\frac{m'}{n'}} = \sqrt[n']{a^{m'}} = \sqrt[n'm]{a^{m'm}} = \sqrt[m'n]{a^{m'm}} = \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}.$$

Obținem astfel noțiunea de *putere cu exponent rațional pozitiv*.

De exemplu:

$$9^{\frac{5}{4}} = \sqrt[4]{9^5} = \sqrt[4]{9^4 \cdot 9} = 9 \sqrt[4]{9} = 9 \sqrt[4]{3}; \quad 8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{2^6} = 4.$$

Din noțiunea de putere cu exponent rațional pozitiv, particularizată la numerele naturale n , respectiv la numerele raționale pozitive $\frac{1}{n}$, se obține noțiunea de putere cu exponent natural, respectiv noțiunea de radical, pentru numerele pozitive.

Observație. Cerința $a \geq 0$, din definiție, este esențială deoarece, în caz contrar, formula (1) ar putea să nu aibă sens. De exemplu, $(-2)^{\frac{1}{4}}$ după formula (1) ar trebui să fie radical de ordinul 4 din -2 , care nu are sens.

Proprietăți ale puterilor cu exponent rațional pozitiv

În cele ce urmează presupunem că $\frac{m}{n}$ și $\frac{p}{q}$ sînt numere raționale pozitive. Atunci:

$$1^\circ a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n} + \frac{p}{q}} (a \geq 0);$$

$$2^\circ (a \cdot b)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}} \cdot b^{\frac{m}{n}} (a, b \geq 0);$$

$$3^\circ \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}} = \frac{a^{\frac{m}{n}}}{b^{\frac{m}{n}}} (a \geq 0, b > 0);$$

$$4^\circ \left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q}} (a \geq 0);$$

$$5^\circ \text{ Dacă } \frac{m}{n} > \frac{p}{q}, \text{ atunci } \frac{a^{\frac{m}{n}}}{a^{\frac{p}{q}}} = a^{\frac{m}{n} - \frac{p}{q}} (a > 0).$$

Aceste proprietăți se demonstrează ușor folosind proprietățile radicalilor. Să demonstrăm prima proprietate. Avem

$$a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[n]{a^m} \sqrt[q]{a^p} = \sqrt[nq]{a^{mq}} \sqrt[nq]{a^{np}} = \sqrt[nq]{a^{mq+np}} = a^{\frac{mq+np}{nq}} = a^{\frac{m}{n} + \frac{p}{q}}.$$

Lăsăm ca exercițiu, verificarea celorlalte proprietăți.

Observație. Proprietatea 1^o este adevărată și pentru un număr finit de factori, adică:

$$a^{\frac{m_1}{n_1}} \cdot a^{\frac{m_2}{n_2}} \cdot \dots \cdot a^{\frac{m_h}{n_h}} = a^{\frac{m_1}{n_1} + \frac{m_2}{n_2} + \dots + \frac{m_h}{n_h}}$$

Exemple: $5^{\frac{1}{5}} \cdot 5^{\frac{4}{5}} = 5^{\frac{1}{5} + \frac{4}{5}} = 5^1 = 5;$

$$a^{\frac{6}{7}} \cdot a^{\frac{5}{6}} = a^{\frac{6}{7} + \frac{5}{6}} = a^{\frac{71}{42}} \quad (a > 0).$$

Pentru $a \neq 0$, am convenit să punem $a^0 = 1$. Expresiei 0^0 nu i se dă nici un sens.

2. *Puteri cu exponent rațional negativ.* Așa cum am definit puterea cu exponent întreg negativ (vezi § 1.3), definim și *puterea cu exponent rațional negativ*.

Fie $a > 0$, un număr real pozitiv și $\frac{m}{n}$ un număr rațional pozitiv. Atunci prin definiție,

$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}.$$

De exemplu:

$$8^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{8^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{8^2}} = \frac{1}{4}; \quad 27^{-\frac{5}{6}} = \frac{1}{27^{\frac{5}{6}}} = \frac{1}{\sqrt[6]{27^5}} = \frac{1}{\sqrt[6]{3^{15}}} = \frac{1}{\sqrt{3^5}} = \frac{1}{9\sqrt{3}}.$$

Acum știm ce înseamnă puterea cu exponent rațional oarecare a oricărui număr real pozitiv. Puterile cu exponent rațional oarecare au următoarele proprietăți de bază:

1) $a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n} + \frac{p}{q}} \quad (a > 0);$

2) $(ab)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}} \cdot b^{\frac{m}{n}} \quad (a, b > 0);$

3) $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}} = \frac{a^{\frac{m}{n}}}{b^{\frac{m}{n}}} \quad (a, b > 0);$

4) $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q}} \quad (a > 0);$

5) $\frac{a^{\frac{m}{n}}}{a^{\frac{p}{q}}} = a^{\frac{m}{n} - \frac{p}{q}} \quad (a > 0).$

Am demonstrat în paragraful precedent aceste proprietăți pentru cazul exponenților raționali pozitivi. Ele se pot demonstra și pentru exponenți raționali oarecare.

Să demonstrăm, de exemplu, proprietatea 1). Fie pentru aceasta $\frac{m}{n}$ și $\frac{p}{q}$ numere raționale. Cazul în care ambele numere sînt pozitive a fost dat în paragraful precedent. Rămîn atunci de considerat următoarele cazuri:

- 1° ambii exponenți sînt negativi;
- 2° unul dintre exponenți este negativ, iar celălalt pozitiv;
- 3° cel puțin unul dintre exponenți este zero.

Să le analizăm pe rînd:

1° Dacă $\frac{m}{n}, \frac{p}{q} < 0$, atunci $-\frac{m}{n}, -\frac{p}{q} > 0$. După definiție și aplicînd proprietatea analoagă a puterilor cu exponent rațional pozitiv, avem:

$$a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = \frac{1}{a^{-\frac{m}{n}}} \cdot \frac{1}{a^{-\frac{p}{q}}} = \frac{1}{a^{-\frac{m}{n} + \left(-\frac{p}{q}\right)}} = \frac{1}{a^{-\left(\frac{m}{n} + \frac{p}{q}\right)}} = a^{\frac{m}{n} + \frac{p}{q}}.$$

2° În cazul al doilea fie, de exemplu, $\frac{m}{n} > 0$ și $\frac{p}{q} < 0$ (adică $-\frac{p}{q} > 0$).

Să presupunem mai întîi că $\frac{m}{n} > -\frac{p}{q}$. Atunci, după definiție și proprietatea 5° a puterilor cu exponent pozitiv, avem:

$$a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}} \cdot \frac{1}{a^{-\frac{p}{q}}} = \frac{a^{\frac{m}{n}}}{a^{-\frac{p}{q}}} = a^{\frac{m}{n} - \left(-\frac{p}{q}\right)} = a^{\frac{m}{n} + \frac{p}{q}}.$$

Dacă $\frac{m}{n} < -\frac{p}{q}$, atunci

$$a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}} \cdot \frac{1}{a^{-\frac{p}{q}}} = \frac{1}{a^{-\frac{m}{n}}} \cdot \frac{1}{a^{-\frac{p}{q}}}$$

Dar $-\frac{p}{q} > \frac{m}{n} = -\left(-\frac{m}{n}\right)$ și după situația precedentă, avem:

$$\frac{1}{a^{-\frac{m}{n}}} \cdot \frac{1}{a^{-\frac{p}{q}}} = \frac{1}{a^{-\frac{m}{n} - \frac{p}{q}}} = \frac{1}{a^{-\left(\frac{m}{n} + \frac{p}{q}\right)}} = a^{\frac{m}{n} + \frac{p}{q}}.$$

În sfîrșit, dacă $\frac{m}{n} = -\frac{p}{q}$ adică $\frac{m}{n} + \frac{p}{q} = 0$, atunci $a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = \frac{a^{\frac{m}{n}}}{a^{-\frac{p}{q}}} =$

$$= 1 = a^0 = a^{\frac{m}{n} + \frac{p}{q}}.$$

3° Dacă unul sau ambii exponenți sînt zero proprietatea este evidentă (avem în vedere că $a^0 = 1$).

Lăsăm ca exercițiu demonstrarea celorlalte proprietăți.

Observație. Dacă în cazul puterilor cu exponent rațional pozitiv am putut vorbi despre proprietatea 5, doar pentru $\frac{m}{n} > \frac{p}{q}$, în acest paragraf (după ce am definit puterile

cu exponent rațional negativ) ea se poate demonstra și pentru $\frac{m}{n} \leq \frac{p}{q}$ (cînd $a > 0$).

De exemplu:

$$\frac{16^{\frac{3}{4}}}{16^{\frac{4}{5}}} = 16^{\frac{3}{4} - \frac{4}{5}} = 16^{-\frac{1}{20}} = (2^4)^{-\frac{1}{20}} = 2^{-\frac{1}{5}} = \frac{1}{2^{\frac{1}{5}}} = \frac{1}{\sqrt[5]{2}}.$$

3. *Funcția putere cu exponent rațional.* Fiind dat un număr rațional $\frac{m}{n}$, nenul, putem defini o funcție

$$f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty), f(x) = x^{\frac{n}{m}},$$

numită *funcție putere cu exponent rațional*.

Deoarece $f(x) = (\sqrt[n]{x})^m$, rezultă că funcția putere cu exponent rațional are proprietăți asemănătoare cu ale funcției putere. Astfel:

- Dacă $\frac{m}{n}$ este pozitiv, atunci funcția f este strict crescătoare.
- Dacă $\frac{m}{n}$ este negativ, atunci funcția f este strict descrescătoare.
- Funcția f este inversabilă, inversa sa fiind

$$g : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty), g(x) = x^{\frac{m}{n}}.$$

Să demonstrăm a). Fie $x_1, x_2 \in (0, \infty)$ cu $x_1 < x_2$. Folosind proprietatea analoagă de monotonie a funcțiilor radical și putere deducem că $\sqrt[n]{x_1} < \sqrt[n]{x_2}$, de unde $(\sqrt[n]{x_1})^m < (\sqrt[n]{x_2})^m$, adică $f(x_1) < f(x_2)$.

Analog se demonstrează b).

Să arătăm în sfîrșit proprietatea c). Dacă $x \in (0, \infty)$, atunci $g(f(x)) = \left(x^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{n}{m}} = x$,

iar dacă $y \in (0, \infty)$, atunci $f(g(y)) = \left(y^{\frac{n}{m}}\right)^{\frac{m}{n}} = y$.

Deci $g \circ f$ și $f \circ g$ sînt egale cu funcția identică a lui $(0, \infty)$. Așadar, f este inversabilă, g fiind inversa sa.

Mai mult, fiind inversabilă, funcția putere cu exponent rațional este bijectivă (vezi § 3.7 din cap. II). În figura V.7 am reprezentat graficul func-

ției $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty), f(x) = x^{-\frac{1}{2}}$ (construit prin „puncte”). Cu linie întreruptă am reprezentat graficul funcției inverse $g : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty), g(x) = x^{-2}$.



Fig. V.7

EXERCIȚII

1. Să se găsească radicalii:

a) $\sqrt{(x-1)^2}$; b) $\sqrt{(x+5)^2}$; c) $\sqrt{(2x^3-3x+1)^2}$; d) $\sqrt{(-3x^2+x-1)^2}$.

2. Să se efectueze suma:

$$\sqrt{(x-2)^2} + \sqrt{(5-x)^2}.$$

3. Să se construiască graficul funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \sqrt{(x-2)^2} + \sqrt{(5-x)^2}.$$

4. Să se găsească valorile lui x , pentru care sînt definite expresiile:

a) $f(x) = \sqrt{x-2}$; b) $f(x) = \sqrt[5]{x-2}$; c) $f(x) = \sqrt[4]{3x^2+5x-2}$;

d) $f(x) = \sqrt[3]{3-x} + \sqrt[4]{5x-5}$; e) $f(x) = \sqrt[9]{x^3-x+1}$.

5. Să se calculeze:

a) $\sqrt{173^2 - 52^2}$; b) $\sqrt[3]{373^2 - 252^2}$; c) $\sqrt{(242,5)^2 - (46,5)^2}$.

6. Să se simplifice expresiile:

$$\sqrt[10]{2^5}; \sqrt[12]{(-5)^3}; \sqrt[8]{a^4}; \sqrt[10]{\frac{625}{256}}; \sqrt[6]{(\sqrt{7}-2)^3};$$

$$\sqrt[4]{(1-\sqrt{2})^2}; \sqrt[9]{(\sqrt{3}-\sqrt{5})^3}; \sqrt[10]{(\sqrt{3}-4)^2}; \sqrt[6]{(1-\sqrt{2})^2}.$$

7. Să se simplifice expresiile:

a) $\sqrt[3]{[(x-1)(x+1)]^4}$; b) $\sqrt[3]{(x^2-x+1)^4}$.

8. Fără a calcula radicalii, să se găsească care dintre numerele următoare este mai mare:

a) $2\sqrt{3}$ sau $3\sqrt{2}$; b) $5\sqrt{7}$ sau $8\sqrt{3}$; c) $3\sqrt[3]{4}$ sau $4\sqrt[3]{2}$.

9. Să se simplifice expresiile:

a) $\sqrt{5\sqrt[3]{625}}$; b) $\sqrt[5]{2\sqrt[4]{4\sqrt[3]{8}}}$; c) $\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}} \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}}$;

d) $\sqrt{\frac{a+1}{a-1}} \sqrt{\frac{a-1}{a+1}}$.

10. Să se calculeze:

a) $\sqrt{50} - 5\sqrt{8} + \sqrt{2} + \sqrt{128}$; b) $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{250} - \sqrt[3]{686} - \sqrt[3]{16}$;

c) $(2\sqrt{3} - 3\sqrt{2} + \sqrt{6}) \cdot (\sqrt{6} - \sqrt{2} - 2\sqrt{3})$; d) $(\sqrt{8} - 3\sqrt{2} + \sqrt{10}) \cdot (\sqrt{2} + \sqrt{1,6} + 3\sqrt{0,4})$.

11. Să se raționalizeze numitorii fracțiilor:

a) $\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$; b) $\frac{1}{\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{24}}$; c) $\frac{12}{3+\sqrt{2}-\sqrt{5}}$; d) $\frac{15}{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{7}}$;

e) $\frac{31}{2+\sqrt{2}-\sqrt{6}}$; f) $\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$; g) $\frac{1}{2-\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{6}}$;

h) $\frac{\sqrt{\sqrt{a}-\sqrt{b}}}{\sqrt{\sqrt{a}+\sqrt{b}}}$.

12. Să se simplifice expresiile:

$$i) \frac{3\sqrt[3]{a}}{a} + a^{\frac{1}{6}} \sqrt[3]{a} - \frac{a^{\frac{2}{7}}}{\sqrt[2]{a}} - \frac{3a^0}{\sqrt[3]{a}} \quad (a > 0);$$

$$ii) \frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} - \frac{x^{\frac{3}{2}}-y^{\frac{3}{2}}}{x-y} \quad (x > 0, y > 0, x \neq y).$$

13. Să se rezolve ecuațiile:

$$a) \sqrt{x+1} = 2; \quad b) \sqrt{x-3} = x-3; \quad c) \sqrt{x-1} + 1 = \sqrt{x+\sqrt{x+8}};$$

$$d) \sqrt{7-\sqrt{x-3}} = 2; \quad e) \sqrt{4-x} + \sqrt{5+x} = 3;$$

$$f) \sqrt{2x+1} = 2\sqrt{x} - \sqrt{x-3}; \quad g) \sqrt{1+x\sqrt{x^2+24}} = x+1;$$

$$h) \sqrt{a+x} + \sqrt{a-x} = \sqrt{2a}; \quad i) \sqrt{x-3} - \sqrt{x+3} = 2 - \sqrt{10};$$

$$j) \sqrt{1+ax} = x + \sqrt{1-ax}; \quad k) \sqrt[3]{x+45} - \sqrt[3]{x-16} = 1;$$

$$l) \sqrt{x-1} + \sqrt{x-2} + \sqrt{x-3} + 1 = 0; \quad m) x + \sqrt{6+\sqrt{x^2}} = 0.$$

14. Să se construiască graficele funcțiilor:

$$a) f_1: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_1(x) = \sqrt{x-1}; \quad b) f_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_2(x) = \sqrt[3]{x-2};$$

$$c) f_3: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt[3]{x} - 2.$$

15. Să se așeze în ordine crescătoare numerele:

$$a) \left(\frac{4}{7}\right)^{-\frac{2}{3}}; \quad \left(\frac{49}{16}\right)^{\frac{4}{3}}; \quad \left(\frac{16}{49}\right)^{-\frac{1}{4}}; \quad b) \left(\frac{9}{4}\right)^{-0,1}; \quad \left(\frac{9}{4}\right)^{0,2}; \quad \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{6}};$$

$$c) 1; \sqrt{2}; \sqrt[3]{3}; \sqrt[4]{4}.$$

16. Să se demonstreze identitățile (formulele radicalilor compuși):

$$\sqrt{a+\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} + \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$$

$$\sqrt{a-\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} - \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}},$$

unde a, b și $a^2 - b$ sînt numere reale nenegative.

17. Folosind formulele radicalilor compuși să se transforme expresiile:

$$a) \sqrt{5+2\sqrt{6}}; \quad b) \sqrt{6-\sqrt{20}}; \quad c) \sqrt{10-2\sqrt{21}}; \quad d) \sqrt{9-\sqrt{45}};$$

$$e) \sqrt{x-\sqrt{x^2-y^2}}.$$

18. Să se demonstreze că, pentru $1 \leq x \leq 2$,

$$\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = 2.$$

19. Să se calculeze:

$$\frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt[12]{y^{19}}} \cdot \left(\frac{x^{-\frac{1}{2}} \sqrt[3]{y}}{\sqrt[4]{xy^{-1}}} \right)^{\frac{1}{3}} \cdot \left(\frac{x^{-\frac{3}{8}}}{y^{-\frac{2}{3}}} \right)^{\frac{4}{3}},$$

pentru $x = 5$; $y = 20$.

29. Să se calculeze:

$$\left(x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} \right)^{-2} (x^{-1} + y^{-1}) + \frac{2}{\left(x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} \right)^3} \cdot \left(x^{-\frac{1}{2}} + y^{-\frac{1}{2}} \right),$$

dacă se dă că:

$$\sqrt[3]{x} = \left(\frac{2\sqrt{3}}{9} \right)^{-\frac{1}{3}}; \quad \sqrt[3]{y} = \sqrt[3]{2} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^{-1}.$$

21. Să se arate că, pentru orice $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ și $\sqrt{abc} > 2$, are loc identitatea

$$\frac{\sqrt{\frac{abc+4}{a}} - \sqrt[4]{\frac{bc}{a}}}{\sqrt{abc}-2} = \frac{1}{\sqrt{a}}$$

CAPITOLUL VI

NUMERE COMPLEXE

Prin introducerea numerelor reale se pot exprima rezultatele oricăror măsurători, dar problema soluțiilor ecuațiilor de orice tip, cu coeficienți reali, nu este rezolvată. Ecuații simple ca $x^2 + 1 = 0$, $x^2 + x + 1 = 0$ nu au soluții în mulțimea \mathbf{R} a numerelor reale. De aceea, se pune în mod necesar problema extinderii în continuare a noțiunii de număr. Această extindere conduce la noțiunea de număr complex. Vom arăta la sfârșitul acestui capitol că mulțimea numerelor complexe este suficient de largă, încât orice ecuație de gradul al doilea cu coeficienți reali să aibă soluții în această mulțime.

Numerele complexe nu reprezintă rezultatul unor măsurători și de aceea teoria numerelor complexe are un caracter mai abstract, mai formal decât teoria numerelor reale. Remarcăm că în pofida acestui grad de abstractizare a noțiunilor, teoria numerelor complexe, prin implicațiile sale, are multiple aplicații practice (de exemplu, în: mecanică, electrotehnică, fizică atomică ș.a.).

§1. MULȚIMEA NUMERELOR COMPLEXE

1.1. Definirea numerelor complexe

Prezentăm acum construcția mulțimii numerelor complexe, plecând de la mulțimea \mathbf{R} a numerelor reale.

Fie produsul cartezian

$$\mathbf{R} \times \mathbf{R} = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbf{R}\},$$

adică mulțimea perechilor ordonate de numere reale.

Precizăm că, două perechi (a, b) și (a', b') sînt *egale* dacă și numai dacă $a = a'$ și $b = b'$. Astfel egalitatea $(a, b) = (a', b')$ este echivalentă cu două egalități de numere reale: $a = a'$ și $b = b'$.

Definim pe mulțimea $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ două operații algebrice: *adunarea* și *înmulțirea*.

Dacă $z = (a, b)$ și $z' = (a', b')$ aparțin mulțimii $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$, atunci definim:

$$z + z' = (a + a', b + b'). \quad (1)$$

Elementul $(a + a', b + b')$ se numește *suma* dintre z și z' , iar operația prin care oricăror elemente z și z' din mulțimea $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ se asociază suma lor, se numește *adunare*.

De asemenea, definim:

$$zz' = (aa' - bb', ab' + a'b). \quad (2)$$

Elementul $(aa' - bb', ab' + a'b)$ se numește *produsul* dintre z și z' , iar operația prin care oricăror elemente z și z' din mulțimea $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ se asociază produsul lor, se numește *înmulțire*.

De exemplu:

$$(2, -1) + (-3, 1) = (2 - 3, -1 + 1) = (-1, 0),$$

$$(2, -1)(-3, 1) = (2 \cdot (-3) - (-1) \cdot 1, 2 \cdot 1 + (-1)(-3)) = (-6 + 1, 2 + 3) = (-5, 5).$$

Definiție. Fiecare element al mulțimii $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$, pe care sînt definite cele două operații precedente (1) și (2), se numește *număr complex*.

Se notează cu \mathbf{C} mulțimea numerelor complexe.

Fie submulțimea lui \mathbf{C} :

$$R' = \{(a, 0) \mid a \in \mathbf{R}\}.$$

Funcția de la \mathbf{R} la R' definită prin

$$a \rightarrow (a, 0)$$

este evident o funcție bijectivă de la mulțimea \mathbf{R} a numerelor reale în submulțimea R' a lui \mathbf{C} .

Mai mult, operațiile de adunare și înmulțire a numerelor complexe care aparțin mulțimii R' se transcriu astfel:

$$(a, 0) + (a', 0) = (a + a', 0);$$

$$(a, 0)(a', 0) = (aa', 0).$$

Aceste relații arată că adunarea și înmulțirea pe R' se fac după aceleași reguli ca adunarea și înmulțirea numerelor reale. Din acest motiv rezultă că R' are aceleași proprietăți aritmetice ca mulțimea \mathbf{R} a numerelor reale. Acest fapt, permite să identificăm numărul complex $(a, 0)$ cu numărul real a . Practic, această identificare revine la a înlocui numărul complex $(a, 0)$ cu numărul real a și invers.

Așadar punem $(a, 0) = a$. În particular, numerele complexe $(0, 0)$ și $(1, 0)$ sînt numerele reale 0 și 1.

1.2. Proprietățile adunării numerelor complexe

1° Adunarea este *comutativă*, adică oricare ar fi z și z' din \mathbb{C} , avem

$$z + z' = z' + z.$$

Într-adevăr, dacă $z = (a, b)$ și $z' = (a', b')$, atunci avem $z + z' = (a, b) + (a', b') = (a + a', b + b')$. Analog avem $z' + z = (a' + a, b' + b)$. Cum însă adunarea numerelor reale este comutativă avem $a + a' = a' + a$ și $b + b' = b' + b$. Deci $(a + a', b + b') = (a' + a, b' + b)$, adică $z + z' = z' + z$.

2° Adunarea este *asociativă*, adică oricare ar fi z , z' și z'' din \mathbb{C} , avem

$$(z + z') + z'' = z + (z' + z'').$$

Într-adevăr, dacă $z = (a, b)$, $z' = (a', b')$ și $z'' = (a'', b'')$, atunci avem $(z + z') + z'' = [(a, b) + (a', b')] + (a'', b'') = (a + a', b + b') + (a'', b'') = ((a + a') + a'', (b + b') + b'')$. Analog avem $z + (z' + z'') = (a + (a' + a''), b + (b' + b''))$. Cum însă adunarea numerelor reale este asociativă avem $(a + a') + a'' = a + (a' + a'')$ și $(b + b') + b'' = b + (b' + b'')$. Deci $(z + z') + z'' = z + (z' + z'')$.

3° *Element neutru*. Numărul complex $0 = (0, 0)$ este *element neutru* pentru adunare adică oricare ar fi z din \mathbb{C} avem

$$z + 0 = 0 + z = z.$$

Într-adevăr, dacă $z = (a, b)$, atunci cum 0 este element neutru pentru adunarea numerelor reale, avem

$$z + 0 = (a, b) + (0, 0) = (a + 0, b + 0) = (a, b) = z.$$

Dar după proprietatea 1°, avem de asemenea $0 + z = z$.

4° Orice număr complex are un *opus*, adică oricare ar fi z din \mathbb{C} există un număr complex, notat cu $-z$, astfel încît

$$z + (-z) = (-z) + z = 0.$$

Într-adevăr, dacă $z = (a, b)$, atunci $-z = (-a, -b)$, deoarece

$$z + (-z) = (a, b) + (-a, -b) = (a + (-a), b + (-b)) = (0, 0) = 0.$$

Conform proprietății 1° avem, de asemenea, $(-z) + z = 0$.

De exemplu:

dacă $z_1 = (2, 3)$, atunci $-z_1 = (-2, -3)$,

dacă $z_2 = (-1, 1)$, atunci $-z_2 = (1, -1)$.

Observație. Dacă z și z' sînt numere complexe, suma $z + (-z')$ se notează, simplu prin $z - z'$ și se numește *diferența* dintre z și z' . Operația prin care oricărui două numere complexe z și z' se asociază diferența lor se numește *scădere*.

Dacă $z = (a, b)$ și $z' = (a', b')$, atunci avem formula:

$$z - z' = (a - a', b - b'). \quad (3)$$

De exemplu: dacă $z = (2, -5)$ și $z' = (-3, 1)$, atunci $z - z' = z + (-z') = (2, -5) + [-(-3, 1)] = (2, -5) + (3, -1) = (5, -6)$.

1.3. Proprietățile înmulțirii numerelor complexe

1° Înmulțirea este *comutativă*, adică oricare ar fi z și z' din \mathbb{C} , avem:

$$zz' = z'z.$$

Într-adevăr, dacă $z = (a, b)$ și $z' = (a', b')$, atunci $zz' = (a, b)(a', b') = (aa' - bb', ab' + a'b)$. Analog, avem $z'z = (a'a - b'b, a'b + ab')$. Cum adunarea și înmulțirea numerelor reale sînt operații comutative, avem $aa' - bb' = a'a - b'b$ și $ab' + a'b = a'b + ab'$.

Deci $zz' = z'z$.

2°. Înmulțirea este *asociativă*, adică oricare ar fi z, z' și z'' din \mathbb{C} , avem

$$(zz')z'' = z(z'z'').$$

Într-adevăr, dacă $z = (a, b)$, $z' = (a', b')$ și $z'' = (a'', b'')$, atunci $(zz')z'' = [(aa' - bb', ab' + a'b)](a'', b'') = ((aa' - bb')a'' - (ab' + a'b)b'', (aa' - bb')b'' + a''(ab' + a'b)) = (aa'a'' - bb'a'' - ab'b'' - a'bb'', aa'b'' - bb'b'' + a''ab' + a''a'b)$. Analog, avem $z(z'z'') = (aa'a'' - ab'b'' - ba'b'' - ba''b', aa'b'' + aa''b' + a'a''b - b'b''b)$. Avînd în vedere comutativitatea adunării și înmulțirii numerelor reale, rezultă că expresiile lui $(zz')z''$ și $z(z'z'')$ sînt aceleași; deci $(zz')z'' = z(z'z'')$.

3° *Element neutru*. Numărul complex $1 = (1, 0)$ este *element neutru* pentru înmulțire, adică oricare ar fi z din \mathbb{C} avem

$$z \cdot 1 = 1 \cdot z = z.$$

Într-adevăr, dacă $z = (a, b)$ atunci cum 1 este element neutru pentru înmulțirea numerelor reale, avem

$$z \cdot 1 = (a, b)(1, 0) = (a, b) = z.$$

După proprietatea 1° avem, de asemenea, $1 \cdot z = z$.

4° Orice număr complex diferit de 0 are un *invers*, adică oricare ar fi $z \neq 0$ există un număr complex, notat cu z^{-1} , astfel încît

$$zz^{-1} = z^{-1}z = 1.$$

Fie $z = (a, b)$ diferit de $(0, 0)$, adică cel puțin una din componentele a sau b este nenulă, altfel spus, $a^2 + b^2 \neq 0$. Dacă (x, y) este un număr complex astfel încît $(a, b)(x, y) = (1, 0)$, atunci

$$(ax - by, bx + ay) = (1, 0).$$

De aici rezultă:

$$ax - by = 1,$$

$$bx + ay = 0.$$

Rezolvînd sistemul, se obține:

$$x = \frac{a}{a^2 + b^2}, \quad y = \frac{-b}{a^2 + b^2}.$$

După proprietatea 1° avem, de asemenea,

$$(x, y)(a, b) = (1, 0).$$

$$z^{-1} = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right).$$

Observația 1. În loc de z^{-1} ($z \neq 0$), se folosește uneori notația $\frac{1}{z}$. Dacă $z' = (a', b')$ este un alt număr complex, atunci $z'z^{-1}$ se notează încă prin $\frac{z'}{z}$ și se numește *cîtlul împărțirii* lui z' la z ($z \neq 0$).

Cîtlul $\frac{z'}{z}$ este definit de formula:

$$\frac{z'}{z} = \left(\frac{aa' + bb'}{a^2 + b^2}, \frac{ab' - a'b}{a^2 + b^2} \right) \quad (4)$$

Exemple:

1) dacă $z = (2, -1)$ atunci $z^{-1} = \frac{1}{z} = \left(\frac{2}{4+1}, \frac{1}{4+1} \right) = \left(\frac{2}{5}, \frac{1}{5} \right).$

2) dacă $z = (2, -1)$ și $z' = (1, -1)$, atunci

$$\begin{aligned} z'z^{-1} = \frac{z'}{z} &= \left(\frac{2 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1)}{4+1}, \frac{2 \cdot (-1) - 1 \cdot (-1)}{4+1} \right) = \\ &= \left(\frac{2+1}{5}, \frac{-2+1}{5} \right) = \left(\frac{3}{5}, \frac{-1}{5} \right). \end{aligned}$$

5°. *Înmulțirea este distributivă față de adunare*, adică oricare ar fi z, z' și z'' din \mathbb{C} , au loc relațiile:

$$\begin{aligned} z(z' + z'') &= zz' + zz'' \\ (z + z')z'' &= zz'' + z'z''. \end{aligned}$$

Într-adevăr, dacă $z = (a, b)$, $z' = (a', b')$ și $z'' = (a'', b'')$, atunci $z(z' + z'') = (a, b) \cdot [(a', b') + (a'', b'')] = (a, b) (a' + a'', b' + b'') = (a(a' + a'') - b(b' + b''), a(b' + b'') + (a' + a'')b) = (aa' + aa'' - bb' - bb'', ab' + ab'' + a'b + a''b)$. Pe de altă parte, avem $zz' + zz'' = (a, b) (a', b') + (a, b) (a'', b'') = (aa' - bb', ab' + a'b) + (aa'' - bb'', ab'' + a''b) = (aa' - bb' + aa'' - bb'', ab' + a'b + ab'' + a''b)$. Avînd în vedere comutativitatea adunării numerelor reale, rezultă că expresiile lui $z(z' + z'')$ și $zz' + zz''$ sînt aceleași; deci $z(z' + z'') = zz' + zz''$.

Analog, se demonstrează cea de a doua relație pe care o lăsăm ca exercițiu.

Observația 2. Să observăm că numărul complex $(0, 1)$ are proprietatea $(0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1$. Rezultă deci că $(0, 1)$ este o rădăcină a ecuației $x^2 + 1 = 0$. Așadar, această ecuație are soluții în mulțimea numerelor complexe, ceea ce nu era posibil în mulțimea numerelor reale.

§2. FORMA ALGEBRICĂ A NUMERELOR COMPLEXE

2.1. Notăția $z = (a, b)$, introdusă pentru numerele complexe, nu este prea comodă în calculele cu numere complexe. De aceea, de obicei, se folosește o altă scriere a numerelor complexe. Convenim să notăm numărul com-

plex $(0, 1)$ prin i . Atunci, după regulile de adunare și înmulțire a numerelor complexe, avem:

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (b, 0)(0, 1).$$

Deoarece $(a, 0)$ și $(b, 0)$ se identifică cu a respectiv b , iar $(0, 1)$ s-a notat cu i , atunci această scriere se reprezintă sub forma

$$(a, b) = a + bi.$$

Această expresie se numește *forma algebrică* a numărului complex (a, b) .

De exemplu:

$$(2, -1) = 2 + (-1)i = 2 - i;$$

$$(1, 0) = 1 + 0 \cdot i = 1;$$

$$(0, -5) = 0 + (-5)i = -5i.$$

În continuare vom scrie numerele complexe sub forma lor algebrică.

Numărul complex i se numește *unitate imaginară*. Numerele de forma bi , cu b număr real, se numesc *imaginare*. Dacă numărul complex z se scrie sub forma $z = a + bi$, atunci a se numește *partea reală*, iar bi *partea imaginară* a numărului z . Numărul b se numește *coeficientul părții imaginare**.

De exemplu, pentru numărul complex $4 + 5i$, partea reală este 4, iar partea imaginară $5i$; coeficientul părții imaginare este egal cu 5. Pentru numărul $-2i$, partea reală este 0, cea imaginară $-2i$, iar coeficientul părții imaginare este -2 . Pentru numărul 3, partea reală este 3, cea imaginară este $0 \cdot i = 0$, iar coeficientul părții imaginare este egal cu 0.

Reluăm mai jos adunarea și înmulțirea a două numere complexe reprezentate sub forma lor algebrică. Astfel:

$$(a + bi) + (a' + b'i) = (a + a') + (b + b')i; \quad (1')$$

$$(a + bi)(a' + b'i) = (aa' - bb') + (ab' + a'b)i. \quad (2')$$

Deci, *suma a două numere complexe este un număr complex a cărui parte reală, respectiv imaginară, este suma părților reale, respectiv imaginare, ale numerelor date.*

Formula (2') care dă înmulțirea a două numere complexe este mai greu de reținut și chiar de formulat. Observăm însă că, dacă $z = a + bi$ și $z' = a' + b'i$ sînt numere complexe, atunci avînd în vedere proprietățile operațiilor pe \mathbb{C} rezultă:

$$(a + bi)(a' + b'i) = aa' + (ab' + a'b)i + bb'i^2.$$

Dar, înlocuind $i^2 = -1$ în ultima relație, se obține formula (2').

Pentru un număr complex $z = a + bi$ se notează, uneori, $a = \operatorname{Re}(z)$, care se citește „real de z ” și $b = \operatorname{Im}(z)$, care se citește „imaginar de z ”.

2.2. Numere complexe conjugate

Dacă $z = a + bi$ este un număr complex, atunci numărul $a - bi$, notat prin \bar{z} (adică z barat) sau $\overline{a + bi}$ se numește *conjugatul* său. Evident, conjugatul lui \bar{z} este z . De aceea, numerele complexe z și \bar{z} se numesc *conjugate*.

Dacă a este un număr real oarecare, atunci

$$a = a + 0i = a - 0i = \bar{a},$$

și deci a este egal cu conjugatul său. Mai mult, dacă $a + bi$ este un număr complex, astfel încît $a + bi = a - bi$, atunci $b = -b$, de unde $b = 0$. Deci $a + bi = a + 0i = a$ este un număr real.

Astfel, am arătat că: *dintre toate numerele complexe, numerele reale (și numai ele) sînt egale cu conjugatele lor.*

Avem următoarele proprietăți:

1° *Suma și produsul a două numere complexe conjugate sînt numere reale.* Într-adevăr, $z + \bar{z} = (a + bi) + (a - bi) = 2a$ și

$$z\bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2.$$

2° Oricare ar fi numerele complexe z și z' avem

$$\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'},$$

$$\overline{zz'} = \bar{z}\bar{z'}.$$

Într-adevăr, dacă $z = a + bi$ și $z' = a' + b'i$, atunci

$$\begin{aligned}\overline{z + z'} &= \overline{(a + a') + (b + b')i} = (a + a') - (b + b')i = \\ &= (a - bi) + (a' - b'i) = \bar{z} + \bar{z'};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{zz'} &= \overline{(aa' - bb') + (ab' + a'b)i} = (aa' - bb') - (ab' + a'b)i = \\ &= (a - bi)(a' - b'i) = \bar{z}\bar{z'}.\end{aligned}$$

Formulele (3) și (4), aplicate numerelor complexe scrise sub formă algebrică, dau relațiile:

$$(a + bi) - (a' + b'i) = (a - a') + (b - b')i \quad (3')$$

$$\frac{a' + b'i}{a + bi} = \frac{aa' + bb'}{a^2 + b^2} + \frac{ab' - a'b}{a^2 + b^2} i. \quad (4')$$

Pentru relația (3') se poate da o regulă analoagă celei date pentru adunare. Observăm, de asemenea, că (4') rezultă dacă amplificăm fracția $\frac{a' + b'i}{a + bi}$ prin conjugatul numitorului, care este $a - bi$.

În particular, așa se poate proceda și pentru aflarea inversului unui număr complex. Într-adevăr, dacă $a' + b'i = 1$ și $a + bi \neq 0$, atunci

$$\frac{1}{a + bi} = \frac{a - bi}{(a + bi)(a - bi)} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2} i.$$

Exemple:

$$1) \frac{7-i}{3+i} = \frac{(7-i)(3-i)}{(3+i)(3-i)} = \frac{21-7i-3i-1}{9+1} = \frac{20-10i}{10} = 2-i;$$

$$2) \frac{2+3i}{2+i} = \frac{(2+3i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{4-2i+6i+3}{4+1} = \frac{7+4i}{5} = \frac{7}{5} + \frac{4}{5}i;$$

$$3) \frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-i}{1+1} = \frac{1-i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i.$$

2.3. Modulul unui număr complex

Modulul unui număr complex $z = a + bi$ se definește ca fiind *numărul real* $\sqrt{a^2 + b^2}$ și se notează prin $|z| = |a + bi|$.

Modulul unui număr complex $z = a + bi$ este întotdeauna pozitiv, el fiind egal cu zero dacă și numai dacă $a = b = 0$.

Exemple: $|1 + 3i| = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$, $|-1 - i| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$,

$$|2i| = |0 + 2i| = \sqrt{0+4} = 2, |4| = |4 + 0i| = \sqrt{16+0} = 4.$$

Dacă z și z' sînt două numere complexe, atunci

$$1^\circ \quad |zz'| = |z| |z'|;$$

$$2^\circ \quad |z'| - |z| \leq |z' + z| \leq |z'| + |z|.$$

Să demonstrăm prima relație. Într-adevăr dacă

$$\begin{aligned} z = a + bi \text{ și } z' = a' + b'i, \text{ atunci } |zz'| &= |(aa' - bb') + (ab' + a'b)i| = \\ &= \sqrt{(aa' - bb')^2 + (ab' + a'b)^2} = \sqrt{(a^2 + b^2)(a'^2 + b'^2)} = \\ &= \sqrt{a^2 + b^2} \sqrt{a'^2 + b'^2} = |z| |z'|. \end{aligned}$$

A doua relație o lăsăm ca exercițiu. Noi însă o vom demonstra în paragraful următor pe cale vectorială.

2.4. Puterile numărului i

Conform observației 2 din paragraful 1.3 avem $i^2 = -1$. Atunci se deduce succesiv:

$$i^3 = i^2 i = (-1)i = -i.$$

$$i^4 = i^3 i = (-i)i = 1.$$

În general, fie n un număr natural oarecare. Atunci numărul n se găsește într-una (și numai într-una) din următoarele situații:

$$1^\circ \quad n = 4k \text{ (} k, \text{ număr natural) și deci } i^n = i^{4k} = (i^4)^k = 1^k = 1;$$

$$2^\circ \quad n = 4l + 1 \text{ (} l, \text{ număr natural) și deci } i^n = i^{4l+1} = i^{4l} \cdot i = 1 \cdot i = i;$$

$$3^\circ \quad n = 4p + 2 \text{ (} p, \text{ număr natural) și deci } i^n = i^{4p+2} = i^{4p} \cdot i^2 = 1(-1) = -1;$$

$$4^\circ \quad n = 4q + 3 \text{ (} q, \text{ număr natural) și deci } i^n = i^{4q+3} = i^{4q} \cdot i^3 = 1(-i) = -i.$$

Așadar, puterile cu exponent natural ale lui i sînt elementele mulțimii $\{-1, 1, -i, i\}$.

De exemplu,

$$j^{25} = j^{4 \cdot 6 + 1} = (j^4)^6 \cdot j = 1 \cdot j = j,$$

$$j^{18} = j^{4 \cdot 4 + 2} = (j^4)^4 \cdot j^2 = 1 \cdot (-1) = -1,$$

$$j^{31} = j^{4 \cdot 7 + 3} = (j^4)^7 \cdot j^3 = 1 \cdot (-j) = -j.$$

§3. REPREZENTAREA GEOMETRICĂ A NUMERELOR COMPLEXE

3.1. Amintim că numerele reale se pot reprezenta prin punctele unei axe. Mai precis, fie d o axă pe care fixăm o origine O și o unitate de măsură. Dacă asociem fiecărui punct al dreptei d abscisa sa, se obține o funcție bijectivă de la punctele acestei drepte în mulțimea numerelor reale.

Un număr complex, $z = a + bi$, este determinat prin două numere reale a și b . De aceea este natural ca să reprezentăm geometric numerele complexe prin punctele unui plan.

Fie pentru aceasta un plan π în care ne fixăm un sistem de axe ortogonale xOy . Fiecărui număr complex $z = a + bi$, i se asociază punctul M de coordonate (a, b) (fig. VI.1).

Punctul M se numește *imaginea geometrică* a numărului complex $a + bi$, iar numărul $a + bi$ se numește *afixul punctului* M .

Din teorema lui Pitagora, aplicată în triunghiul dreptunghic OMM' , se deduce că $OM = \sqrt{OM'^2 + MM'^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$. Această egalitate ne arată că lungimea segmentului $[OM]$ este modulul numărului complex $z = a + bi$.



Fig. VI.1

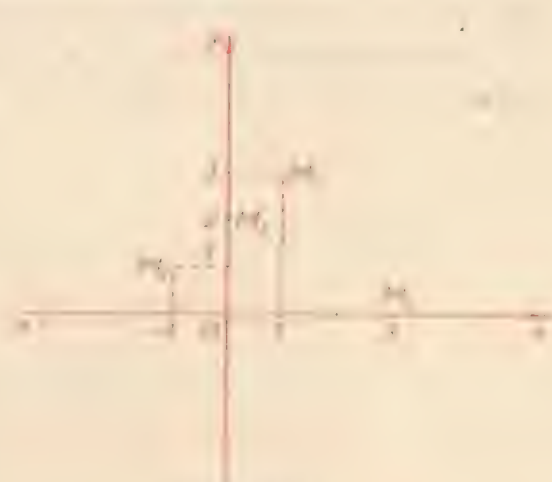


Fig. VI.2

Exemple. Numerelor complexe $1 + 3i$, $-1 + i$, $2i = 0 + 2i$, $3 = 3 + 0i$, li se asociază respectiv punctele $M_1(1, 3)$, $M_2(-1, 1)$, $M_3(0, 2)$, $M_4(3, 0)$ (fig. VI.2).

Avem $OM_1 = |1 + 3i| = \sqrt{10}$, $OM_2 = |-1 + i| = \sqrt{2}$, $OM_3 = |2i| = 2$, $OM_4 = |3| = 3$.

Asocierea

$$z = a + bi \rightarrow M(a, b)$$

este o funcție bijectivă de la mulțimea numerelor complexe la punctele planului π . Prin această funcție, mulțimii numerelor reale li corespunde axa $x'x$,

iar mulțimii numerelor imaginare îi corespunde axa $y'y$. De aceea axa $x'x$ se numește axa reală, iar axa $y'y$ axa imaginară. Planul ale cărui puncte se identifică cu numerele complexe prin funcția bijectivă definită mai înainte se numește *planul complex*.

3.2. Interpretarea geometrică a adunării și scăderii numerelor complexe

Numerele complexe au și o altă interpretare geometrică. Să asociem fiecărui punct M al planului π vectorul \overrightarrow{OM} , care are originea în O și capătul în punctul M . Această asociere este evident o funcție bijectivă de la mulțimea numerelor complexe în mulțimea vectorilor care au originea în $O(0, 0)$. Astfel fiecare număr complex $a + bi$ poate fi reprezentat geometric ca vectorul \overrightarrow{OM} unde M are coordonatele (a, b) . Se spune că (a, b) sînt coordonatele vectorului \overrightarrow{OM} .

Reprezentarea numerelor complexe cu ajutorul vectorilor ne dă o interpretare simplă a adunării numerelor complexe:

$$(a + bi) + (a' + b'i) = (a + a') + (b + b')i.$$

Este cunoscut că la adunarea vectorilor coordonatele corespunzătoare lor se adună. De aceea dacă vectorul \overrightarrow{OM} (fig. VI.3) are coordonatele (a, b) , iar vectorul $\overrightarrow{OM'}$ are coordonatele (a', b') , atunci vectorul \overrightarrow{OS} (S fiind al patrulea vîrf al paralelogramului, care are celelalte trei vîrfuri respectiv M, O și M') are coordonatele $(a + a', b + b')$. Acest vector corespunde numărului complex $(a + a') + (b + b')i$ care este *suma* dintre $a + bi$ și $a' + b'i$.



Fig. VI.3

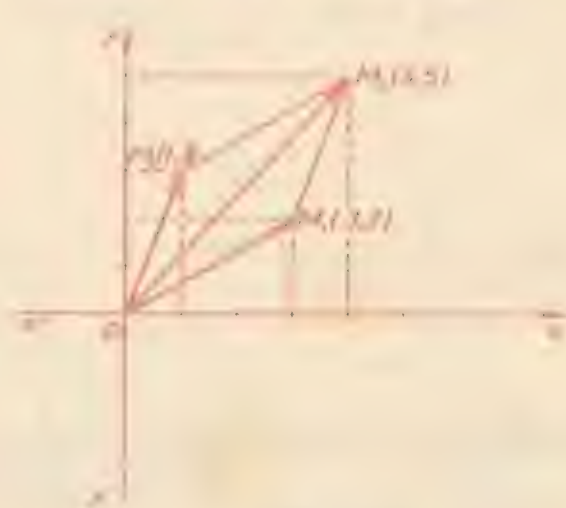


Fig. VI.4

Exemplu. Fie numerele complexe $z_1 = 3 + 2i$ și $z_2 = 1 + 3i$, reprezentate în plan prin vectorii $\overrightarrow{OM_1}$ și $\overrightarrow{OM_2}$ unde: $M_1(3, 2)$ și $M_2(1, 3)$ (fig. VI.4). Atunci suma $z_3 = z_1 + z_2 = (3 + 2i) + (1 + 3i) = 4 + 5i$ este reprezentată în plan prin vectorul $\overrightarrow{OM_3}$ unde M_3 este punctul de coordonate $(4, 5)$.

Observăm, de asemenea, că opusul numărului $a + bi$, care este $-a - bi$, este reprezentat prin vectorul $\overrightarrow{OM_1}$, unde M_1 este simetricul punctului $M(a, b)$ față de origine (fig. VI.5). Astfel se deduce ușor interpretarea geometrică a scăderii a două numere complexe.

Cum $z' - z = z' + (-z)$, avînd în vedere interpretarea geometrică a adunării numerelor complexe, rezultă că D are coordonatele $(a' - a, b' - b)$ și vectorul \overrightarrow{OD} corespunde diferenței

$$z' - z = (a' - a) + (b' - b)i.$$

Avem $OM = |z|$, $OM' = |z'|$, $OD = |z' - z|$ și $OS = |z' + z|$.

Relațiile dintre laturi în triunghiurile OMS și OMM' dau respectiv:

$$MS - OM \leq OS \leq MS + OM,$$

$$OM' - OM \leq MM' \leq OM' + OM.$$

Dar cum $MS = OM'$ și $MM' = OD$, rezultă:

$$|z'| - |z| \leq |z' + z| \leq |z'| + |z|,$$

$$|z'| - |z| \leq |z' - z| \leq |z'| + |z|.$$

Observație. Definiția produsului numerelor complexe are o interpretare geometrică mai puțin simplă. Aceasta se va face la geometrie, cu ajutorul reprezentării trigonometrice a numerelor complexe.



Fig. VI.5



Fig. VI.6

3.3. Interpretarea geometrică a numerelor complexe conjugate

Dacă M este imaginea geometrică a numărului complex $a + bi$ (fig. VI.6), atunci simetricul M' al lui M față de axa reală este imaginea geometrică a conjugatului său, $a - bi$.



Fig. VI.7

Observăm, de asemenea, că numerele complexe de modul egal cu r se reprezintă în plan prin punctele cercului cu centrul în origine și de rază egală cu r .

De exemplu, numerele: $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$, $\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$, $-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$, $-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$, al căror modul este egal cu 1 se găsesc pe cercul cu centrul în origine și de rază unitate (punctele M_1, M_2, M_3, M_4) (fig. VI.7).

§4. REZOLVAREA ECUAȚIEI DE GRADUL AL DOILEA CU COEFICIENȚI REALI

În capitolul I, am rezolvat ecuația de gradul al doilea cu coeficienți reali, în cazul în care discriminantul său este pozitiv sau nul. Am arătat astfel că rădăcinile ecuației

$$ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0,$$

pentru $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$, sînt date de formulele:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

În acest caz rădăcinile ecuației sînt numere reale.

1. Să rezolvăm acum ecuația

$$ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0,$$

în cazul în care $\Delta = b^2 - 4ac < 0$.

Știm că ecuația $ax^2 + bx + c = 0$ se mai poate scrie și sub forma:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0.$$

Cum $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, atunci $-\Delta = 4ac - b^2 > 0$.

În mulțimea numerelor complexe ecuația se poate scrie astfel:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)^2 = 0$$

sau

$$\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right) = 0,$$

de unde

$$x + \frac{b}{2a} + \frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a} = 0 \text{ sau } x + \frac{b}{2a} - \frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a} = 0.$$

Deducem de aici că, în acest caz, rădăcinile ecuației de gradul al doilea sînt:

$$x_1 = \frac{-b + i\sqrt{4ac - b^2}}{2a} \text{ și } x_2 = \frac{-b - i\sqrt{4ac - b^2}}{2a}.$$

Așadar, dacă $\Delta < 0$ rădăcinile ecuației $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ sînt *numere complexe conjugate*.

Relațiile lui Viète sînt evident aceleași ca în cazul cînd $\Delta \geq 0$, adică

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a},$$

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

2. Formarea ecuației de gradul al doilea cînd se cunosc rădăcinile.

Fie x_1 și x_2 numere complexe date. Pentru ca ele să fie rădăcinile unei ecuații de gradul al doilea cu coeficienți reali, trebuie ca x_1 și x_2 să fie conjugate. Deci $x_1 = a + bi$ și $x_2 = a - bi$. Atunci

$$x_1 + x_2 = 2a \text{ și } x_1 x_2 = a^2 + b^2.$$

Ecuația de gradul al doilea care are ca rădăcini pe x_1 și x_2 va fi $x^2 + px + q = 0$, unde $-p = x_1 + x_2 = 2a$, iar $q = x_1 x_2 = a^2 + b^2$.

Deci, ecuația $x^2 - 2ax + a^2 + b^2 = 0$ are ca rădăcini numerele complexe: $a + bi$ și $a - bi$.

3. Descompunerea trinomului de gradul al doilea cu coeficienți reali în produs de polinoame de gradul întîi.

Fie trinomul $aX^2 + bX + c$, $a \neq 0$, cu a, b, c numere reale. Dacă x_1 și x_2 sînt rădăcinile ecuației $ax^2 + bx + c = 0$, atunci un raționament analog celui făcut în cap. I, § 2.4, pentru cazul $b^2 - 4ac \geq 0$, dă

$$aX^2 + bX + c = a(X - x_1)(X - x_2) = (aX - ax_1)(X - x_2).$$

Deci orice trinom de gradul al doilea cu coeficienți reali se descompune în produs de polinoame de gradul întîi cu coeficienți complecși. Din cap. I, § 2.4 rezultă că în cazul $b^2 - 4ac \geq 0$ și numai în acest caz, trinomul de gradul al doilea se descompune în produs de factori de gradul întîi cu coeficienți reali.

Exemple. 1) Să se rezolve ecuația:

$$x^2 + x + 1 = 0.$$

Avem $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$. Atunci $x_1 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ și $x_2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$.

2) Să se găsească ecuația de gradul al doilea care are rădăcinile $x_1 = \sqrt{3} - i$ și $x_2 = \sqrt{3} + i$. Avem $x_1 + x_2 = 2\sqrt{3}$ și $x_1 x_2 = 4$. Deci ecuația căutată este $x^2 - 2\sqrt{3}x + 4 = 0$.

3) Să se descompună în factori de gradul întîi trinomul $X^2 - 2X + 10$.

Rădăcinile ecuației $x^2 - 2x + 10 = 0$ sînt:

$$x_1 = 1 + 3i \text{ și } x_2 = 1 - 3i.$$

$$\text{Atunci } X^2 - 2X + 10 = (X - 1 - 3i)(X - 1 + 3i).$$

Aplicație. Descompunerea trinomului în factori de gradul întîi se folosește la simplificarea fracțiilor. Dacă printre factorii numărătorului și ai numitorului sînt trinoame de gradul al doilea, le descompunem în factori de gradul întîi ca la pct. 3 și apoi factorii comuni la numărător și la numitor se pot simplifica.

Exemple. 1) Să se simplifice fracția: $\frac{X^2 + 10X - 11}{-5X^2 + 7X - 2}$.

Descompunând în factori numărătorul și numitorul, obținem:

$$\frac{X^2 + 10X - 11}{-5X^2 + 7X - 2} = \frac{(X - 1)(X + 11)}{(X - 1)(-5X + 2)} = \frac{X + 11}{-5X + 2}.$$

2) Să se simplifice fracția $\frac{X^3 + X^2 + X + 1}{X^3 + (1 - i)X^2 - iX}$.

$$\text{Avem } \frac{X^3 + X^2 + X + 1}{X^3 + (1 - i)X^2 - iX} = \frac{(X + 1)(X + i)(X - i)}{X(X + 1)(X - i)} = \frac{X + i}{X}.$$

EXERCITII

1. Să se găsească numerele reale x și y din ecuațiile:

a) $(5x + 3yi) + (2y - xi) = 3 - i$;

b) $(x + 3yi) + \frac{3}{2}y + 2xi = 4 + 8i$;

c) $\left(-3y + \frac{1}{2}xi\right) - (-8x + 5yi) = -2 + 12i$;

d) $\frac{x - 2}{1 - i} + \frac{y - 3}{1 + i} = 1 - 3i$.

2. Să se calculeze:

a) $(2 + i)(3 - 2i)$; b) $(-6 + i)(5 + 2i)$; c) $(\sqrt{2} - i)(\sqrt{3} + 2i)$;

d) $(\sqrt{2} + 3i)(3 - \sqrt{2}i)$; e) $(\sqrt{3} + \sqrt{2}i)(\sqrt{3} - \sqrt{2}i)$.

3. Să se calculeze:

a) $\frac{2 + 3i}{1 - i}$; b) $\frac{2i}{2 - i}$; c) $\frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i\sqrt{3}}$; d) $\frac{a\sqrt{b} + b\sqrt{a}i}{b\sqrt{a} - a\sqrt{b}i}$; e) $\frac{-2 - 5i}{4 + i} - \frac{6 - 7i}{4 - i}$;

f) $\frac{a - bi}{b + ai} - i\frac{b - ai}{a + bi}$; g) $\frac{\sqrt{1+a} + i\sqrt{1-a}}{\sqrt{1+a} - i\sqrt{1-a}} - \frac{\sqrt{1-a} + i\sqrt{1+a}}{\sqrt{1-a} - i\sqrt{1+a}}$;

h) $\left(\frac{1 + i\sqrt{7}}{2}\right)^4 + \left(\frac{1 - i\sqrt{7}}{2}\right)^4$.

4. Să se demonstreze egalitățile

a) $\frac{6 - i}{3 + 4i} = \frac{13 + 41i}{-25 + 25i}$; b) $\frac{2 + i}{3 - i} = \frac{13 + 4i}{17 - 9i}$.

5. Să se spună care sînt conjugatele numerelor complexe: $1 + i$, $2 - 3i$; 5 ; $4i$; 0 , $2i - 1$ și să se interpreteze geometric.

6. Să se calculeze:

a) $i^6 + i^{16} + i^{26} + i^{36} + i^{46}$; b) $(-i)^3 + (-i)^{13} + (-i)^{23} + (-i)^{33} + (-i)^{43}$;

c) $i + i^2 + i^3 + i^4 + \dots + i^n$ ($n \geq 4$); d) $i \cdot i^2 \cdot i^3 \cdot i^4 \cdot \dots \cdot i^{100}$; e) $\frac{1}{i^{11}} - \frac{1}{i^{41}} + \frac{1}{i^{75}} - \frac{1}{i^{243}}$;

f) $[i(2 - i)]^2$; g) $[2i(3 - 4i)]^2$; h) $i^n + i^{n+1} + i^{n+2} + i^{n+3}$, $n \in \mathbb{N}$.

7. Să se găsească valorile reale ale lui m astfel încît numărul $3i^3 - 2mi^2 + (1 - m)i + 5$ să fie: a) real; b) imaginar; c) nenul.
8. Să se găsească toate numerele complexe ale căror pătrate să fie:
a) i ; b) $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$; c) $-i$; d) $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.
9. Să se reprezinte în plan numerele complexe:
a) $3 + 5i$; b) $4 - i$; c) $-2 - 2i$; d) $-4i$; e) $5i$; f) $-5 - 5i$.
10. Să se dea interpretarea geometrică a formulelor:
 $(1 + 3i) + (1 - 3i) = 2$;
 $(3 - 5i) + (-1 + 3i) = 2 - 2i$.
11. Să se descompună în factori de gradul întâi trinoamele:
a) $X^2 - 2X + 2$; b) $4X^2 + 4X + 5$; c) $X^2 - 14X + 74$.
12. Să se rezolve sistemele:
a) $\begin{cases} x + y = 6, \\ xy = 45; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x - 3y = 1, \\ xy = 1. \end{cases}$
13. Să se simplifice fracțiile:
a) $\frac{15X^2 - 8mX + m^2}{12X^2 - mX - m^2}$; b) $\frac{12X^2 - X - 1}{3X^2 + 5X - 2}$; c) $\frac{X^3 - 2X^2 - X + 2}{X^3 - 3X^2 + 2X}$;
d) $\frac{X^4 + 1}{X^3 + X\sqrt{2} + 1}$; e) $\frac{X^2 - X + 1}{X^4 + X^2 + 1}$; f) $\frac{X^3 + 3iX - 2}{X^2 + iX + 2}$.
14. Să se găsească ecuațiile de gradul al doilea cu coeficienți reali, astfel încît una dintre rădăcini să fie:
a) $(3 - i)(2i - 4)$; b) $\frac{32 - i}{1 - 3i}$; c) $\sqrt{a} + \sqrt{b}i$ (a, b fiind numere reale și pozitive).
15. Să se rezolve ecuațiile:
a) $x^3 = 27$; b) $x^3 = -27$; c) $3x^3 = 2$; d) $x^3 = -5$; e) $x^4 = 16$; f) $x^4 = -16$;
g) $x^4 = -3$; h) $3x^4 = 5$.
16. Să se găsească suma tuturor rădăcinilor ecuațiilor:
a) $x^3 = -4$; b) $x^4 = 4$.
17. Să se găsească produsul tuturor rădăcinilor ecuațiilor:
a) $x^3 = 6$; b) $x^4 = -7$.
18. Să se arate că pătratul unui număr complex $z = a + bi$ este real dacă și numai dacă ori $a = 0$, ori $b = 0$.
19. Să se găsească numerele reale x și y astfel încît
a) $(xi - y)^2 = 6 - 8i + (x + yi)^2$;
b) $\frac{i}{x} + \frac{i}{y} + \frac{1}{a} = \frac{1}{x} - \frac{1}{y} + \frac{bi}{y}$ (a și b fiind numerele reale cu $a \neq 0$).
20. Să se determine perechile (x, y) din plan pentru care:
a) $|\sqrt{x^2 + 4} + \sqrt{y - 4}i| = \sqrt{10}$; $y \geq 4$
b) $|\sqrt{2x + y} + \sqrt{x + 2y}i| = \sqrt{3}$; $2x + y \geq 0$, $x + 2y \geq 0$.

21. Să se rezolve sistemele de ecuații:

$$\text{a) } \begin{cases} x^5 + y^5 = 33 \\ x + y = 3 \end{cases}; \quad \text{b) } \begin{cases} x^3 + y^4 = 5 \\ xy^3 = 2 \end{cases}; \quad \text{c) } \begin{cases} x^3 - xy = 28 \\ y^3 - xy = -12. \end{cases}$$

22. Dacă $a + bi$ este un număr complex dat, să se găsească numerele complexe $z = x + iy$, astfel încît $z^2 = a + bi$.

23. Să se determine numerele complexe z , care verifică relația:

$$z^4 + 3 - 4i = 0.$$

24. Să se arate că pentru ecuația de gradul al doilea

$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, cu coeficienți complecși, rădăcinile sale sînt date de aceeași formulă ca și în cazul ecuației de gradul al doilea cu coeficienți reali.

CAPITOLUL VII

PROBLEME RECAPITULATIVE

1. Dacă x și y satisfac relația $ax^2 + 2bxy + cy^2 = 0$, să se determine $\frac{x}{y}$ ($y \neq 0$).
2. Dacă a, b, c sînt laturile unui triunghi oarecare, să se arate că ecuația $b^2x^2 + (b^2 + c^2 - a^2)x + c^2 = 0$ nu are rădăcini reale.
3. Să se determine valorile parametrului m , astfel încît ecuația $x^2 - 6x + m = 0$ să aibă două rădăcini reale dintre care una să fie dublul celeilalte.
4. Să se determine două numere nenule, astfel încît suma, produsul și diferența pătratelor lor să fie egale.
5. Să se determine legătura dintre rădăcinile ecuațiilor: $ax^2 + bx + c = 0$ și $cx^2 + bx + a = 0$.
6. Fără a rezolva ecuația, să se găsească suma pătratelor rădăcinilor ecuației:
$$(x^2 + 2x)^2 - 5(x^2 + 2x) + 3 = 0.$$

Indicație. Se notează $y = x^2 + 2x$.

7. Să se determine mulțimile A și B și numerele reale p și q știind că:

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + x + p = 0\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + qx - 4 = 0\},$$

$$A \cup B = \{-2, -1, 1, 4\}.$$

Indicație. Se folosesc relațiile dintre rădăcini și coeficienți.

8. Să se determine parametrul real m , astfel încît

$$\{x \in \mathbb{R} \mid mx^2 + (m - 1)x + m + 2 = 0\} \cap [0, 1] \neq \emptyset.$$

Indicație. Punem $z = \frac{x - 1}{x - 0}$, unde 0 și 1 sînt capetele intervalului, obținem ecuația

în z : $(m + 2)z^2 - 3(m + 1)z + 3m + 1 = 0$. Fie x_1, x_2 rădăcinile ecuației în x și z_1, z_2 rădăcinile ecuației în z . Avem: a) $x_i \in (0, 1)$ dacă și numai dacă $z_i < 0$, $i = 1, 2$.
b) $x_i \notin (0, 1)$ dacă și numai dacă $z_i > 0$, $i = 1, 2$.

Deci problema se reduce la studiul semnelor rădăcinilor ecuației în z .

9. Să se determine parametrul real m , astfel, încît

$$\{x \in \mathbf{R} \mid mx^2 + (m+1)x + m+2 = 0\} \cap [-1, 1] = \emptyset.$$

10. Să se determine numerele reale a și b astfel încît

$$\{x \in \mathbf{R} \mid x^2 + 2ax + b = 0\} \setminus \{x \in \mathbf{Z} \mid x^2 + 2bx + a = 0\} = \emptyset.$$

11. Se consideră mulțimile $A = \left\{ x \in \mathbf{Z} \mid \frac{x^{10} + 3}{2x^6} \in \mathbf{Z} \right\}$ și $B = \left\{ x \in \mathbf{Z} \mid \frac{x^{10} + 2}{3x^3} \in \mathbf{Z} \right\}$.

Să se arate că $A = B$.

12. Să se arate că funcția

$$f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = ax^4 + bx + c, \quad a \neq 0$$

nu este injectivă.

Indicație. Se observă că ecuația $f(x) - c = 0$ are două rădăcini distincte.

13. Să se arate că dacă ecuațiile $x^2 + ax + b = 0$ și $x^2 + cx + d = 0$, ($a, b, c, d \in \mathbf{Z}$), au o rădăcină irațională comună, atunci $a = c$ și $b = d$.

14. Să se arate că numărul $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{5}$ este irațional.

15. Să se arate că numerele raționale $\frac{1}{n}$ și $\frac{m}{n}$, unde m și n sînt prime între ele, au același număr de cifre în perioadă.

Indicație. Fie $(n, 10) = 1$. Dacă k este cel mai mic exponent pentru care $10^k = n \cdot l + 1$, unde $l \in \mathbf{N}$, atunci k este numărul cifrelor din perioada fracției zecimale sub care se reprezintă numărul $\frac{1}{n}$. Din $10^k = n \cdot l + 1$, rezultă $m \cdot 10^k = mnl + m$ și reciproc.

16. Să se arate că orice număr prim cu 10, are un multiplu scris numai cu cifra 9.

Indicație. Fie $(n, 10) = 1$. Numărul $\frac{1}{n}$ se reprezintă sub forma unei fracții zecimale periodice simple. Notînd cu P numărul reprezentat de perioada sa avem $\frac{1}{n} = \frac{P}{99 \dots 9}$, de unde $n \cdot P = 99 \dots 9$. Deducem de aici că dacă n este prim și cu 9, atunci el admite un multiplu scris numai cu cifra 1.

17. Să se arate că un număr rațional $\frac{m}{n}$, astfel încît n este prim cu m și cu 9, se reprezintă sub forma unei fracții zecimale a cărei perioadă reprezintă un număr multiplu de 9.

Indicație. Fie $\frac{m}{n}$, un astfel de număr rațional, care se reprezintă sub forma unei fracții zecimale periodice simple: $\frac{m}{n} = \frac{P}{99 \dots 9}$. Cum n este prim cu 9, rezultă că P se divide cu 9. Dacă $\frac{m}{n}$ se reprezintă sub formă de fracție zecimală mixtă, avem $10^n \frac{m}{n} = k + \frac{P}{99 \dots 9}$, unde k este întreg, iar n este numărul cifrelor dinaintea perioadei.

18. Să se arate că fracțiile

i) $0, a_1 00 a_2 0000 a_3 0 \dots 0 a_n \underbrace{0 \dots 0}_{2n \text{ ori}} a_{n+1} 0 \dots,$

ii) $0, a_1 a_2 000 a_3 0 \dots 0 a_n \underbrace{00 \dots 000}_{n(1 \cdot 2 \dots n) - 1 \text{ ori}} a_{n+1} 0 \dots$

unde $0 \leq a_i \leq 9$ și oricare ar fi $m \in \mathbb{N}$, există $n > m$, astfel încât $a_n \neq 0$, reprezintă numere iraționale.

19. Să se găsească numerele raționale $\frac{1}{x}$ și $\frac{1}{y}$, a căror sumă este egală cu $0, (0043992)$.

20. Să se arate că oricare ar fi numărul întreg n , suma $\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}$ se reprezintă printr-o fracție periodică mixtă. La fel, pentru $\frac{n^2+1}{n(n^2-1)}$.

Indicație $\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} = \frac{3(n+1)^2 - 1}{n(n+1)(n+2)}$. Se observă că numitorul fracției este multiplu de 3, pe cînd numărătorul nu este multiplu de 3. Numitorul fracției adusă la forma ireductibilă are factorii 2 și 3, de unde rezultă că fracția se reprezintă printr-o fracție periodică mixtă.

21. Fie ecuația $\sqrt{m} + x = \sqrt{n}$ ($m, n \in \mathbb{N}$). Să se arate dacă:

- i) ecuația poate avea rădăcină irațională;
- ii) ecuația poate avea rădăcină rațională.

22. Fie a, b, c numere raționale. Să se arate că $a + b \sqrt[3]{2} + c \sqrt[3]{4} = 0$ dacă și numai dacă $a = b = c = 0$.

23. Dacă a, b, c sînt numere reale, să se arate că:
 $\max(a, \min(b, c)) = \min(\max(a, b), \max(a, c))$,
 $\min(a, \max(b, c)) = \max(\min(a, b), \min(a, c))$.

24. Să se determine minimul expresiilor

- i) $E(a, b) = 2a^2 + 2b^2 + 4b - 1$;
 - ii) $E(a, b) = ab + a^2b^2 + 2$,
- unde $a, b \in \mathbb{R}$.

25. Să se reprezinte grafic funcțiile:

- i) $f_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_1(x) = |x^2 - 4x + 1|$;
- ii) $f_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_2(x) = |-x^2 - 4x + 5|$.

26. Fie familia de funcții de gradul al doilea

$$f_m(x) = mx^2 + 2(m+1)x + m - 1.$$

- i) Să se arate că virfurile parabolilor asociate acestor funcții se găsesc pe dreapta $y = x - 2$.
- ii) Ce porțiune din această dreaptă cuprinde virfurile parabolilor cu ramurile în sus.

27. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ două funcții.

Definim funcțiile $h_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ și $h_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, prin:

$$h_1(x) = \max(f(x), g(x)) \text{ și } h_2(x) = \min(f(x), g(x)).$$

i) Să se arate că dacă f și g sînt strict crescătoare (respectiv strict descrescătoare) pe mulțimea $A \subseteq \mathbb{R}$, atunci h_1 și h_2 sînt strict crescătoare (respectiv strict descrescătoare) pe aceeași mulțime.

ii) Să se reprezinte grafic funcțiile h_1 și h_2 , dacă:

a) $f(x) = 2x + 1$ și $g(x) = x - 3$;

b) $f(x) = |2x - 1|$ și $g(x) = |x + 3|$;

c) $f(x) = x^2 - 2x - 3$ și $g(x) = x + 3$.

28. Să se rezolve ecuațiile:

a) $\left[\frac{x+1}{3} \right] = \frac{x-1}{2}$; b) $\frac{15x-7}{5} = \left[\frac{5+6x}{8} \right]$.

Indicație. a) După definiția părții întregi a unui număr avem

$$\begin{cases} \frac{x-1}{2} \leq \frac{x+1}{3} < \frac{x-1}{2} + 1, \\ \frac{x-1}{2} \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Din inegalitățile de mai sus, rezultă $x \in (-1, 5]$. Cum $\frac{x-1}{2} \in \mathbb{Z}$, avem $x \in \{1, 3, 5\}$.

b) La fel ca mai sus, avem:

$$\begin{cases} \frac{15x-7}{5} \leq \frac{5+6x}{8} < \frac{15x-7}{5} + 1, \\ \frac{15x-7}{5} \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Rezultă $x \in \left\{ \frac{7}{15}, \frac{4}{5} \right\}$.

29. Să se construiască de la mulțimea \mathbb{Z} a numerelor întregi în ea însăși o funcție injectivă care să nu fie surjectivă și o funcție surjectivă care să nu fie injectivă.

30. Fie \mathbb{N}^* mulțimea numerelor naturale nenule. Să se dea exemplu de două funcții f și g de la \mathbb{N}^* la \mathbb{N}^* astfel încît $fg = 1_{\mathbb{N}^*}$, dar $gf \neq 1_{\mathbb{N}^*}$.

31. Să se determine numerele naturale x, y care verifică relația

$$x^2 - y^2 = 135.$$

32. Să se găsească rădăcinile întregi ale ecuației

$$x^4 + y^4 + 2 = 4xy.$$

Indicație. Ecuația devine $(x^2 - y^2)^2 + 2(xy - 1)^2 = 0$, de unde

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 0, \\ xy = 1. \end{cases}$$

33. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dată prin

$$f(x) = \begin{cases} ax, & x < 1 \\ bx, & x \geq 1 \end{cases}$$

a și b fiind numere reale. Să se studieze monotonia funcției f , după valorile lui a și b .

34. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dată prin

$$f(x) = \begin{cases} ax^2, & x < 0 \\ bx, & x \geq 0 \end{cases}$$

a și b fiind numere reale. Să se determine a și b astfel încât f să fie bijectivă și în acest caz să se determine inversa.

35. Cite soluții în numere întregi nenegative are ecuația

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{1960}?$$

36. Să se scrie în ordine crescătoare numerele:

$$\sqrt{3}, \sqrt[3]{6}, \sqrt[6]{30}.$$

37. Să se scrie în ordine descrescătoare numerele:

$$\sqrt{6}, \sqrt[4]{12}, \sqrt[8]{72}.$$

38. Să se rezolve ecuațiile:

a) $\sqrt{\frac{18x}{x+2}} + \sqrt{\frac{x+2}{18x}} = 2\frac{2}{3};$

b) $x^2 + 6x + \sqrt{x^2 + 6x} = 20;$

c) $x^2 + 4\sqrt{6+x^2} + 1 = 0;$ d) $\frac{x^2}{3} + \frac{48}{x^2} = 10\left(\frac{x}{3} - \frac{4}{x}\right).$

Indicație. a) Se notează $y = \sqrt{\frac{18x}{x+2}}$; b) Se notează $\sqrt{x^2 + 6x} = y$; c) Se notează $\sqrt{6+x^2} = y$; d) Se notează $y = \frac{x}{3} - \frac{4}{x}$.

39. Să se rezolve ecuațiile:

a) $\sqrt{x} + \sqrt[4]{x} = 12;$ b) $16x^4 - 625 = 0;$

c) $x(x+1)(x+2)(x+3) = 24;$ d) $9x^3 - 13x - 6 = 0;$

e) $(x+a)(x+2a)(x+3a)(x+4a) = b^4.$

Indicație. a) Se notează $y = \sqrt[4]{x}$; c) Avem $(x^2 + 3x)(x^2 + 3x + 2) = 24$; punem $y = x^2 + 3x$; d) $9x^3 - 4x = 9x + 6$, $x(3x - 2)(3x + 2) = 3(3x + 2)$; $(3x + 2)(3x^2 + 2x - 3) = 0$ etc.; e) Se notează $x + \frac{5}{2}a = y$.

40. Să se rezolve ecuația:

$$x^2 - 8(x + 3)\sqrt{x-1} + 22x - 7 = 0.$$

Indicație $x \geq 1$. Ecuația devine $(x + 3 - 4\sqrt{x-1})^2 = 0$.

41. Să se rezolve ecuațiile:

i) $(a + x)^{\frac{2}{3}} + 4(a - x)^{\frac{2}{3}} - 5(a^2 - x^2)^{\frac{1}{3}} = 0;$

ii) $\sqrt[3]{a + \sqrt{x}} + \sqrt[3]{a - \sqrt{x}} = \sqrt[3]{b};$

iii) $\sqrt[4]{97 - x} + \sqrt[4]{x} = 5;$ iv) $\sqrt{(x-2)^2} + \sqrt{(x-4)^2} = 2.$

Indicație. iii) Se notează $u = \sqrt[4]{97 - x}$, $v = \sqrt[4]{x}$ și obținem sistemul

$$\begin{cases} u + v = 5, \\ u^4 + v^4 = 97. \end{cases}$$

42. Să se arate că

$$\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}} = 4.$$

43. Să se rezolve inecuațiile:

a) $\sqrt{2-x} > x;$ b) $\sqrt{2-x} \leq x.$

44. Să se arate că cuburile a două numere complexe conjugate sînt de asemenea conjugate.

45. Să se arate că produsul oricăror două rădăcini ale ecuației $x^3 - 1 = 0$, este de asemenea o rădăcină a acestei ecuații.

46. Să se arate că modulul numărului complex $\frac{1+ai}{1-ai}$, pentru a număr real, este 1. Reciproc, să se arate că orice număr complex de modul 1, poate fi scris în mod unic sub forma precedentă. Dar dacă a este număr complex?

47. Să se determine x și y , numere întregi, astfel încît

$$\begin{cases} x - y = 48, \\ \frac{x+y}{2} - \sqrt{xy} = 18. \end{cases}$$

48. Să se rezolve sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} |x-1| + |y-5| = 1, \\ y = 5 + |x-1|. \end{cases}$$

Indicație. Se folosește $y \geq 5$, după cum rezultă din a doua ecuație.

49. Să se rezolve sistemele de ecuații:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \begin{cases} x + y + \sqrt{xy} = 14, \\ x^2 + y^2 + xy = 84; \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} \sqrt{x+y} + \sqrt[3]{x-y} = 6, \\ \sqrt[6]{(x+y)^3(x-y)^2} = 8; \end{cases} \\ \text{c)} \begin{cases} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 4, \\ x + y = 28; \end{cases} & \text{d)} \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} = \frac{4}{3}, \\ yx = 9; \end{cases} \\ \text{e)} \begin{cases} x^4 + x^2y^2 + y^4 = 133, \\ x^2 - xy + y^2 = 7; \end{cases} & \text{f)} \begin{cases} \frac{x+y}{xy} + \frac{xy}{x+y} = a + \frac{1}{a}, \\ \frac{x-y}{xy} + \frac{xy}{x-y} = b + \frac{1}{b}. \end{cases} \end{array}$$

Indicație. b) Se notează $u = \sqrt{x+y}$, $v = \sqrt[3]{x-y}$; e) Se folosește relația $x^4 + x^2y^2 + y^4 = (x^2 + xy + y^2)(x^2 - xy + y^2)$; f) Se notează $u = \frac{x-y}{xy}$, $v = \frac{x+y}{xy}$.

50. Să se rezolve sistemele:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{cases} x\sqrt{yz} = 4, \\ y\sqrt{xz} = 9, \\ z\sqrt{xy} = 16; \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} x(x+y+z) = 20, \\ y(x+y+z) = 30, \\ z(x+y+z) = 50; \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} x+y-z = 7, \\ x^2+y^2-z^2 = 37, \\ x^3+y^3-z^3 = 1; \end{cases} \\ \text{d)} \begin{cases} x+y+z = a, \\ x+\epsilon y+\epsilon^2z = b, \\ x+\epsilon^2y+\epsilon z = c, \\ (\text{unde } 1+\epsilon+\epsilon^2=0); \end{cases} & \text{e)} \begin{cases} u+v=2, \\ ux+vy=1, \\ ux^2+vy^2=-1, \\ ux^3+vy^3=-5. \end{cases} & \end{array}$$

RĂSPUNSURI ȘI INDICAȚII

Capitolul I

1. a) $\frac{m-1}{4}$; b) Dacă $m \neq -2$, atunci $x = \frac{4+m^2}{m+2}$; pentru $m = -2$, nu are rădăcini; d) Dacă $m \neq 1$ și $m \neq \frac{3}{4}$, atunci $x = \frac{1-2m}{m-1}$; pentru $m = 1$ și $m = \frac{3}{4}$, nu are rădăcini; e) Dacă $n = 0$ și $m = 1$, atunci x este oarecare; dacă $n = 0$ și $m \neq 1$, nu are rădăcini; pentru $n \neq 0$ și $m \neq -1$, $x = \frac{1-m}{n(m+1)}$; pentru $n \neq 0$ și $m = -1$, nu are rădăcini; h) $-2, \frac{4}{5}$; i) $x \in (-\infty, -10]$; j) $x \in [1, 3]$; k) $-14, 14$. 2. c) Dacă $a > b$, atunci $x \in (-1, \infty)$; dacă $a < b$, atunci $x \in (-\infty, -1)$. d) Dacă $a > -2$, atunci $x > \frac{3-b}{a+2}$; dacă $a < -2$, atunci $x > \frac{3-b}{a+2}$; dacă $a = -2$ și $b > 3$, atunci x este oarecare; pentru $a = -2$ și $b \leq 3$, nu are soluții. e) Dacă $a > -1$, atunci $x > \frac{2}{(a+1)^2}$; dacă $a < -1$, atunci $x < \frac{2}{(a+1)^2}$.
3. a) Trebuie ca $8 + 3x \geq 0$, de unde $x \geq -\frac{8}{3}$. d) $x \in [0, \frac{1}{3}]$. 4. a) $x_1 = \frac{1}{2}$; $x_2 = -\frac{1}{3}$; b) nu are rădăcini reale; d) $x_1 = 1$; $x_2 = \frac{1}{2}$; f) 2; g) Pentru $m = -\frac{3}{2}$ nu are rădăcini; pentru $m \neq -\frac{3}{2}$, $x = 3 + m$. 5. $\Delta = m^2 - 4$. Dacă $|m| = 2$, atunci $\Delta = 0$ și în acest caz ecuația are o rădăcină; dacă $|m| > 2$, atunci $\Delta > 0$ și în acest caz ecuația are două rădăcini distincte; dacă $|m| < 2$, nu are rădăcini. 6. $m = 0$; $m < 0$; $m > 0$. 7. $|m| \leq \frac{1}{4}$.

9. a) Avem $y_1 + y_2 = \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 x_2} = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2}{x_1 x_2} = \frac{p^2}{q} - 2$,
 $y_1 y_2 = 1$. Ecuația este $m \left[y^2 - \left(\frac{p^2}{q} - 2 \right) y + 1 \right] = 0$, m fiind un număr real
oarecare, nenul. 11. a) $m < 0$; b) $m > 0$. 12. c) $(2X - 3m)(X - 2m)$.
13. $m = -2$. 15. Punem $z = x - 1$ și obținem ecuația în z : $4mz^2 + 4z - (m - 1) = 0$. Fie x_1, x_2 rădăcinile ecuației în x și z_1, z_2 rădăcinile ecuației
în z . Avem că: a) $x_1, x_2 < 1$ dacă și numai dacă $z_1, z_2 < 0$; b) $x_1, x_2 > 1$ dacă
și numai dacă $z_1, z_2 > 0$; c) $x_1 < 1$ și $x_2 > 1$, dacă și numai dacă $z_1 < 0$
și $z_2 > 0$. Deci problema se reduce la studiul semnelor rădăcinilor ecuației
în z . 16. a) Trebuie ca $\Delta = 0$, adică $m^2 - 144 = 0$; de unde $m_1 = -12$,
 $m_2 = 12$. 17. a) $(x + 7)(2x + 3)(2x - 3) = 0$;
b) $(6x - 1)(x - 9)(x + 9) = 0$; c) $(x + 3)(x - 4)(x + 4) = 0$.

Capitolul II

§ 2. Mulțimi

4. a) adevărată; b) adevărată; c) adevărată; d) adevărată; e) falsă; f) falsă;
g) falsă; h) falsă; i) adevărată; j) falsă. 6. a) $A = \{0, 2, 3\}$; b) $B = \{1, 7\}$;
c) $C = \{2, 4\}$. 7. $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 7, 11\}$; $A \cap B = \{2, 3\}$; $A - B =$
 $= \{1, 4\}$. 10. $m = 3, m = 4$. 11. $m \in \mathbb{R} - \{-4, 2\}$. 12. $m = \frac{3}{2}$. 15. $C_{\mathbb{R}} A = \mathbb{R}$.
16. Submulțimile lui $A = \{1, 2, 3\}$ sînt: $\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\},$
 $\{2, 3\}, \{1, 2, 3\}$. 17. i) $1, a \in D(a)$; ii) $a =$ număr prim; iii) dacă a este de
forma $a = p^3$, unde p este număr prim sau de forma pq , unde p și q sînt numere
prime diferite; iv) $D(8) = \{1, 2, 4, 8\}$, $D(160) = \{1, 2, 4, 5, 8, 10, 16, 20, 40,$
 $80, 160\}$. 18. $m = \pm 3$. A are 2 elemente cînd $m = \pm 2\sqrt{2}$. 19. Dacă $x \in A_k$,
oricare ar fi $k \geq 1$, atunci $x = a + r_1 m_1 = a + r_2 m_2 = a + r_3 m_3 = \dots$. Se
obține $m_1 > m_2 > m_3 \dots$, contradicție cu faptul că există doar un număr finit
de numere naturale mai mici ca m_1 .

§ 3. Funcții

1. $f(-2) = -10$; $f(-1) = f(2) = -7$; $f(4) = -10$. 2. Se verifică faptul că:
 $g(1) = f(1)$, $g(2) = f(2)$, $g(3) = f(3)$, $g(4) = f(4)$. 3. Nu. 4. Se pot defini patru
funcții. 5. $f(-12) = 0$, $f(-9) = 3$, $f(3) = 3$, $f(9) = 3$, $f(272) = 2$. 6. Trebuie

ca numerele $1 + m$, $4 + m$, $9 + m$ să aparțină mulțimii $\{1, 2, 3\}$. Nu există nici un număr întreg m . 9. Funcția nu este nici injectivă și nici surjectivă. 12. Există 6 funcții injective. Nu există funcții surjective. 13. f_2, f_5, f_6 , sînt injective; nici una din funcțiile date nu este surjectivă. 14. $f(\text{Galați}) = \text{Galați}$, $f(\text{Făgăraș}) = \text{Brașov}$, $g(\text{Teleorman}) = \text{Alexandria}$, $g(\text{Mehedinți}) = \text{Drobeta Turnu-Severin}$. 15. $(g \circ f)(x) = x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 3x + 3$; $(f \circ g)(x) = x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 3x + 1$. 16. Pentru $x \leq 0$, avem $f(x) \leq -2$ și deci $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = [f(x)]^2 = (2x - 3)^2$. Pentru $x > 0$, avem $f(x) > 0$ și deci $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 2f(x) - 1 = 14x - 1$. Pentru $x \leq -2$, avem $g(x) = x^2 > 0$ și deci $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 7g(x) = 7x^2$. Pentru $x \in \left[-2, \frac{1}{2}\right]$, avem $g(x) = 2x - 1 \leq 0$ și deci $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 2g(x) - 3 = 2(2x - 1) - 3 = 4x - 5$. Pentru $x > \frac{1}{2}$, avem $g(x) > 0$ și deci $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 7g(x) = 7(2x - 1) = 14x - 7$. Deci

$$(g \circ f)(x) = \begin{cases} (2x - 3)^2, & \text{dacă } x \leq 0, \\ 14x - 1, & \text{dacă } x > 0; \end{cases} \quad (f \circ g)(x) = \begin{cases} 7x^2, & \text{dacă } x \leq -2, \\ 4x - 5, & \text{dacă } -2 < x \leq \frac{1}{2}, \\ 14x - 7, & \text{dacă } x > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

19. 6 funcții bijective. 20. $f(1) = 7$, $f(2) = 9$, $f(3) = 3$, $f(4) = 1$, $f(5) = 7$, $f(6) = 9$, $f(7) = 3$. În general, $f(4k) = 1$, $f(4k + 1) = 7$, $f(4k + 2) = 9$, $f(4k + 3) = 3$. 22. h și k nu sînt nici injective și nici surjective; $f^{-1}(x) = -x + 4$; $g^{-1}(x) = x - 1$. 23. Se verifică că $f \circ f^{-1} = 1_N$ și deci $f^{-1} = f$. 24. Inversa este

$$f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x, & x \geq 0, \\ \frac{1}{3}x, & x < 0. \end{cases}$$

Capitolul III

1. a) 3,000...; c) 0,25000...; d) 0,000...; e) $\overline{1,75000}$...; g) $\overline{3,(36)}$. 2. a) $\frac{1201}{900}$; b) $\frac{7}{9}$. 3. $-1,3 = -\frac{13}{10} = \frac{-13}{10}$; $3,75 = \frac{375}{100}$. Celelalte numere sînt iraționale; pentru demonstrație a se vedea § 2. 4. a) 4; 9; 144; 1 024. b) 2; 3; 7; 1001. 6. a) $3,43479... < 3,43497...$; e) $-5,4833... > -5,5829...$.

7. i) a) $2,2 \leq \sqrt{5} < 2,3$; b) $-2,3 \leq -\sqrt{5} < -2,2$; c) $1,5 \leq \frac{11}{7} < 1,6$;
d) $-1,6 \leq \frac{11}{7} < -1,5$. ii) a) $2 \leq \sqrt{5} < 3$; $2,2 \leq \sqrt{5} < 2,3$; $2,23 \leq \sqrt{5} < 2,24$; c) $1 \leq \frac{11}{7} < 2$; $1,5 \leq \frac{11}{7} < 1,6$; $1,57 \leq \frac{11}{7} < 1,58$. 8. $x + y = 0,144\dots$. 9. $xy = 3,31\dots$. 10. a) $2,0653\dots$; b) $3,1462\dots$. 11. a) $1,322\dots$; $3,741\dots$. 12. a) Alegând o unitate de măsură de lungime 1, am construit pe $\sqrt{2}$ precum și orice segment având lungimea un număr întreg. Folosind teorema lui Pitagora putem construi segmentele de lungimea cerută. Pentru aceasta observăm că: $(\sqrt{3})^2 = 1^2 + (\sqrt{2})^2$; $(\sqrt{5})^2 = 1^2 + 2^2$; $(\sqrt{6})^2 = 2^2 + (\sqrt{2})^2$; $(\sqrt{10})^2 = 1^2 + 3^2$. Astfel $\sqrt{3}$ este ipotenuza triunghiului dreptunghic având catetele de lungime 1 și $\sqrt{2}$ ș.a.m.d. b) Punctele care au abscisele $\sqrt{3}$ și $-\sqrt{3}$ sînt simetrice față de origine ș.a.m.d. 13. Dacă $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ ar fi rațional, atunci și $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 = 5 + 2\sqrt{6}$ ar fi rațional, de unde $\sqrt{6}$ ar fi rațional. Dar cum $\sqrt{6}$ nu este rațional (demonstrația este analoagă aceleia pe care am dat-o pentru $\sqrt{2}$), avem de-a face cu o contradicție. Cum $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ este irațional, iar $\sqrt{2} - \sqrt{3} = -\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}}$, rezultă că și $\sqrt{2} - \sqrt{3}$ este irațional. 14. Avem $a = \frac{(a+b) + (a-b)}{2}$, $b = \frac{(a+b) - (a-b)}{2}$, $ab = \frac{(a+b)^2 - a^2 - b^2}{2}$. Cum $a + b$ și $a - b$ sînt raționale rezultă că și a , b și ab sînt raționale. 15. Dacă unul din $a + b\sqrt{2}$ sau $a - b\sqrt{2}$ sînt egale cu zero, atunci $(a + b\sqrt{2})(a - b\sqrt{2}) = 0$, de unde $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = 2$. Cum $\frac{a}{b}$ este rațional această relație nu este posibilă. Altă soluție poate fi dată observînd că $a \in \mathbb{Q}$, iar $b\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, și deci suma lor nu poate fi număr rațional. 16. Nu. 17. De exemplu, $x^2 - 2x - 1 = 0$, $x^2 - x - 1 = 0$.

Capitolul IV

1. Dacă $f = g$, atunci $f(0) = g(0)$, $f(1) = g(1)$, $f(-1) = g(-1)$; de unde rezultă $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$, $c_1 = c_2$. 2. a) $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{43}{4}$; b) $-2\left(x + \frac{7}{4}\right)^2 + \frac{57}{8}$; c) $3\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{2}{3}$; d) $0,51\left(x - \frac{5}{51}\right)^2 + \frac{203}{204}$; e) $\frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{5}{36}$.

$f) -\frac{1}{3} \left(x + \frac{3}{5}\right)^2 + \frac{28}{25}$. 4. a) $y_{min} = 9$; b) $y_{max} = -11$; c) $y_{min} = -5$;
 d) $y_{max} = \frac{913}{48}$; e) $y_{max} = 2$; f) $y_{min} = \frac{-111}{200}$. 5. a) Pentru $x \in (-\infty, 1]$,
 funcția este strict descrescătoare, iar pentru $x \in [1, \infty)$ funcția este strict
 crescătoare. d) Pentru $x \in \left(-\infty, \frac{5}{3}\right]$, funcția este strict crescătoare, iar
 pentru $x \in \left[\frac{5}{3}, \infty\right)$ funcția este strict descrescătoare. 6. a) $x \in (-\infty, -1] \cup$
 $\cup [3, \infty) \Rightarrow f(x) \geq 0$; $x \in (-1, 3) \Rightarrow f(x) < 0$; d) $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right] \cup$
 $\cup [1, \infty) \Rightarrow f(x) \leq 0$; $x \in \left(-\frac{1}{2}, 1\right) \Rightarrow f(x) > 0$. Se folosește reprezenta-
 rea grafică a funcției. 9. $f(x) = x^2 + x - 10$. 10. $f(x) = -5x^2 + 10x - 3$.
 11. Virful parabolilor, $V(x, y)$, are coordonatele: $x = m - 1$, $y = -m^2 +$
 $+ 3m - 3$. Eliminând pe m se obține $y = -x^2 + x - 1$. 12. Se rezolvă
 sistemul: $a - b + c = 13$, $4a + 2b + c = 10$, $4ac - b^2 = 36a$. Se obțin
 funcțiile: $f(x) = \frac{1}{9}x^2 - \frac{10}{9}x + \frac{106}{9}$, $f(x) = x^2 - 2x + 10$. 13. a) $x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup$
 $\cup (1, \infty)$; b) $x \in (-\infty, 3 - \sqrt{7}] \cup [3 + \sqrt{7}, \infty)$; d) $x \in \left(-\infty, \frac{-3 - \sqrt{57}}{4}\right) \cup$
 $\cup \left(\frac{-3 + \sqrt{57}}{4}, \infty\right)$; e) $x \notin \mathbb{R}$; h) $x \in \left(2, \frac{5}{2}\right)$; i) $x \in (0, 4)$; j) $x \in \left[0, \frac{8}{5}\right] \cup$
 $\cup \left[\frac{5}{2}, \infty\right)$; l) $x \in \left(-\infty, \frac{11 - \sqrt{105}}{2}\right) \cup \left(\frac{11 + \sqrt{105}}{2}, \infty\right)$. 14. Se pun condițiile:
 $m - 1 > 0$, $\Delta < 0$ și se obține $m \in \left(\frac{5}{3}, \infty\right)$. 15. Se pun condițiile: $m < 0$
 și $\Delta < 0$. 16. Se rezolvă inecuația $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$. 17. Pentru ca fracția E să
 aibă sens pentru orice x real, trebuie ca discriminantul ecuației $x^2 + x + m = 0$
 să fie negativ, adică $1 - 4m < 0$. Apoi din condiția ca $x^2 + (m+1)x + m + 2 > 0$,
 oricare ar fi x real, se obține că $m \in \left(\frac{1}{4}, 1 + 2\sqrt{2}\right)$. 18. a) $x \in [-4, 1) \cup (2, 3]$;
 b) $x \in (2, 3]$; f) $x \in \left[-5, \frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{5 - \sqrt{5}}{5}, 5\right]$. 19. a) $x_V = -\frac{m+1}{m}$, $y_V = -\frac{1}{m}$, de
 unde $-mx_V = m + 1$, sau $m = -\frac{1}{1 + x_V}$, deci $y_V = x_V + 1$; b) $AB =$
 $= |x_2 - x_1| = \frac{2}{|m|}$, $FV = \left|-\frac{1}{m}\right| = \frac{1}{|m|}$. Deci $AB = 2 FV$;
 c) Punctul fix este $(-1, 0)$. 20. a) $\text{Im}f = [0, +\infty)$; b) $\text{Im}f = [1, +\infty)$;
 c) $\text{Im}f = \left[\frac{9 - 2\sqrt{21}}{3}, \frac{9 + 2\sqrt{21}}{3}\right]$; e) $\text{Im}f = \left[-\frac{1}{8}, +\infty\right)$; f) $\text{Im}f = \left[\frac{3}{4}, +\infty\right)$.

$$21. \text{ a) } \left\{ (3, 1); \left(-4, -\frac{11}{3} \right) \right\}; \text{ b) } \left\{ (2, 9); \left(-\frac{10}{3}, \frac{11}{3} \right) \right\}; \text{ c) } \left\{ (2, 1); -\frac{27}{23}, -\frac{29}{23} \right\}.$$

$$22. \text{ a) } \left\{ (2, 1); (-2, -1); \left(\frac{-3\sqrt{5}}{2}, \frac{7}{2\sqrt{5}} \right); \left(\frac{3\sqrt{5}}{2}, \frac{-7}{2\sqrt{5}} \right) \right\}; \text{ b) } \{(2, 1); (-1, -2); (1, 2); (-2, -1)\}; \text{ c) } \{(20, 5); (-20, -5)\}; \text{ d) } \{(-3, 2); (3, -2)\}. \\ 23. \text{ a) } \{(1, 5); (5, 1)\}; \text{ b) } \{(1, 5); (5, 1); (2, 3); (3, 2)\}; \\ \text{ c) } \{(2, 2); (-1 \pm \sqrt{3}, -1 \pm \sqrt{3})\}; \text{ d) } \{(0, 1); (1, 0)\}; \text{ e) } \{(2, 3); (-2, -3); (3, 2); (-3, -2)\}; \text{ f) } \{(3, 1); (1, 3)\}. \\ 24. \text{ Dacă se notează}$$

$$AM = x \text{ și cu } S \text{ aria cuprinsă între cele trei cercuri se obține } S = \\ = \frac{\pi}{2} (-x^2 + 2ax). \text{ Maximul lui } S \text{ are loc când } x = a. \\ 25. \text{ Notăm } NP = MQ = x \text{ și cu } S \text{ aria dreptunghiului. Dacă } [AD] \text{ este înălțimea din } A \\ \text{ pe ipotenuză, atunci din asemănarea triunghiurilor } AMN \text{ și } ABC \text{ obținem} \\ \frac{MN}{BC} = \frac{AD - x}{AD}. \text{ Cum } AD \cdot BC = AB \cdot AC, \text{ atunci } AD = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ și deci} \\ MN = \frac{BC}{AD} (AD - x) = \frac{a^2 + b^2}{ab} \left(\frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} - x \right). \text{ Dar } S = MN \cdot x = \\ = \frac{a^2 + b^2}{ab} \left(\frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} - x \right) x. \text{ Se obține o funcție de gradul al doilea} \\ \text{ în } x. \\ 26. \text{ Notăm } AD = a, AC = x, DC = y. \text{ Dacă } E \text{ este proiecția} \\ \text{ lui } D \text{ pe } [AB], \text{ vom nota } DE = b. \text{ Avem } x = \sqrt{a^2 - b^2} - \sqrt{y^2 - b^2}. \\ \text{ Timpul total pe care îl face călătorul este } \frac{x}{v_1} + \frac{y}{v_2} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{v_1} - \frac{\sqrt{y^2 - b^2}}{v_1} + \frac{y}{v_2}. \\ \text{ Timpul este minim dacă cantitatea } m = \frac{y}{v_2} - \frac{\sqrt{y^2 - b^2}}{v_1} \text{ este minimă. Elimi-} \\ \text{ nind radicalul obținem ecuația de gradul al doilea în } y: (v_1^2 - v_2^2)y^2 - 2v_1^2v_2my + \\ + (v_1^2m^2 + b^2)v_2^2 = 0. \text{ Se pune condiția ca discriminantul acestei ecuații să fie} \\ \text{ pozitiv și se obține că } m \geq \frac{b\sqrt{v_1^2 - v_2^2}}{v_1v_2}. \text{ Deci timpul minim este } \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{v_1} + \\ + \frac{b\sqrt{v_1^2 - v_2^2}}{v_1v_2}. \\ 27. \text{ Dacă } x \text{ și } y \text{ sînt laturile dreptunghiului iar } R \text{ raza}$$

$$\text{cercului atunci } x^2 + y^2 = 4R^2. \text{ Dacă } S \text{ este aria dreptunghiului avem } S = xy. \\ S \text{ este maxim când } S^2 = x^2y^2 = x^2(4R^2 - x^2) \text{ este minimă. Notînd } x^2 = z \\ \text{ se obține o funcție de gradul al doilea.} \\ 28. \text{ Dacă } R \text{ este raza cercului și } x, y$$

semibazele trapezului avem că perimetrul este $4(x + y)$. Se arată că $xy = R^2$ și deci avem minim pentru perimetru când $x = y = R$. 29. Fie x, y proiecțiile catetelor pe ipotenuză. Avem sistemul de ecuații $x + y = a$ și $xy = h^2$. 30. Fie x, y catetele triunghiului. Avem sistemul de ecuații $x + y + \sqrt{x^2 + y^2} = 2p$ și $xy = h \sqrt{x^2 + y^2}$. 31. Se ia ca necunoscută semibaza inferioară. Înălțimea trapezului este $\sqrt{R^2 - x^2}$. Laturile neparalele ale trapezului au lungimile egale cu $\sqrt{2R^2 - 2Rx}$. Se obține ecuația $2x + 2R + 2\sqrt{2R^2 - 2Rx} = 2p$. 32. Se iau ca necunoscute x, y semibazele trapezului. Se obține sistemul $xy = R^2$, $R(x + y) = 2R^2$. 33. Fie $AD = x$, $DC = y$. Se obține sistemul $ax + by = 2k^2$, $x^2 + a^2 = y^2 + b^2$. 34. Dacă x, y reprezintă numărul de ore necesare primei brigăzi, respectiv celei de-a doua brigăzi, pentru terminarea întregii lucrări, obținem sistemul $\frac{x}{3y} + \frac{y}{3x} = \frac{13}{18}$; $\frac{18}{5} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) = 1$. Se obține $x = 9$, $y = 6$. 35. Laturile dreptunghiului sînt 80 m și 60 m.

Capitolul V

§ 1. Puteri

1. a) 16; b) 15^3 ; c) $\left(\frac{1}{3}\right)^{10}$; d) $-\frac{1}{5^3}$. 2. a) $m < 1$, este pozitivă; $m = 1$, este zero; $m > 1$, este negativă; b) $m < \frac{2}{3}$, este pozitivă; $m = \frac{2}{3}$, este zero; $m > \frac{2}{3}$, este negativă; c) este pozitivă oricare ar fi $m \neq \frac{1}{2}$. Pentru $m = \frac{1}{2}$, este zero.
3. a) xy^3 ; b) $(a + b)^2$; c) 2^n . 4. se calculează membrul drept. 5. Se descompune în factori $a^{32} - b^{32} = (a^{16})^2 - (b^{16})^2$. 6. a) $(x^{m+n} + 1)(x^{m-n} + 1)$; b) 0. 7. a) 2^8 ; b) 9^6 ; c) sînt egale; d) $4^{300} = (4^3)^{100}$ și $3^{400} = (3^4)^{100}$, $4^3 < 3^4$, 3^{400} este mai mare; e) $\left(-\frac{1}{32}\right)^3$; f) $\left(\frac{1}{16}\right)^{100}$. 9. Se folosește reprezentarea grafică. 10. Este strict crescătoare. 11. a) $a^{-3}b^{-4}$; $(a + b)^{-5}(a - b)^{-2}$; $3a^{-5}b^{-6}c^{-2}$; b) $2 \cdot 10^{-4}$; $3 \cdot 10^{-6}$; $15 \cdot 10^{-4}$; 12. a) $a^{-4}(1 + a^2) \cdot (a^6 + a^2 - 1)$; b) $4a^{-2}$; c) 1.

§ 2. Radicali

1. a) $|x - 1|$; d) $|-3x^2 + x - 1| = 3x^2 - x + 1$. 2. $7 - 2x$ pentru $x \in (-\infty, 2)$; 3 pentru $x \in [2, 5]$; $2x - 7$ pentru $x \in (5, \infty)$. 3. Conform problemei precedente, avem $f(x) = 7 - 2x$, $x \in (-\infty, 2)$; $f(x) = 3$, $x \in [2, 5]$; $f(x) = 2x - 7$, $x \in (5, \infty)$. 4. a) $x \in [2, \infty)$; b) mulțimea tuturor numerelor reale; c) $x \in (-\infty, -2) \cup \left[\frac{1}{3}, \infty\right)$; d) $x \in [1, \infty)$. 7. a) $\sqrt{|x^2 - 1|}$; b) $\sqrt{x^2 - x + 1}$. 8. a) $3\sqrt{2} > 2\sqrt{3}$; c) $4\sqrt[3]{2} > 3\sqrt[3]{4}$. 9. b) $\sqrt[20]{2^7}$; d) $\sqrt[4]{\frac{a+1}{a-1}}$. 10. c) $4\sqrt{6} - 8\sqrt{3}$; d) 8. 11. c) $2(2\sqrt{2} + \sqrt{10} - \sqrt{5} - 1)$; d) $\frac{3}{2}(\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{21} + \sqrt[3]{49})$. 12. i) $\sqrt{a} - \sqrt[21]{a^5}$; ii) $\frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$. 13. b) 3, 4; d) 12; e) 4, -5; f) 4; g) 0, 5; h) $-a, a$; i) 7. 15. c) $1 < \sqrt{2} = \sqrt[4]{4} < \sqrt[3]{3}$. 17. a) $\sqrt{3} + \sqrt{2}$; c) $\sqrt{7} - \sqrt{3}$. 18. Se scrie $x + 2\sqrt{x-1}$ sub forma $x - 1 + 2\sqrt{x-1} + 1 = (\sqrt{x-1} + 1)^2$. Analog, se procedează cu $x - 2\sqrt{x-1}$. 19. 0,1. 20. $\frac{1}{243}$.

Capitolul VI

1. a) $x = \frac{11}{7}$, $y = -\frac{2}{17}$; b) $x = t$, $y = \frac{2}{3}(4 - t)$, unde t este un număr real oarecare; c) $x = -\frac{92}{77}$, $y = -\frac{194}{77}$; d) $x = 0$, $y = 7$. 2. a) $8 - i$; d) $6\sqrt{2} + 7i$; e) 5. 3. c) $\frac{i\sqrt{3}-1}{2}$; d) i ; f) $-1 - i$; g) $2a$; h) 1. 6. c) 0, dacă $n = 4k$; i, dacă $n = 4k + 1$; $i - 1$, dacă $n = 4k + 2$; -1 , dacă $n = 4k + 3$; d) -1 ; f) $4i - 3$. 7. a) $m = -2$; b) $m = -\frac{5}{2}$; c) $m \neq -2$ sau $m \neq -\frac{5}{2}$. 8. a) $\pm \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i)$; b) $\pm \frac{\sqrt{3}-i}{2}$. 11. a) $(X - 1 - i)(X - 1 + i)$; b) $(2X + 1 - 2i)(2X + 1 + 2i)$. 12. a) $x_1 = 3 - 6i$, $y_1 = 3 + 6i$; $x_2 = 3 + 6i$, $y_2 = 3 - 6i$. 14. a) $m(x^2 + 20x + 200) = 0$, $m \in \mathbb{R}$; b) $m(2x^2 - 14x + 205) = 0$. 15. a) Scriem $x^3 - 27 = (x - 3)(x^2 + 3x + 9) = 0$ și se obțin rădăcinile: $3, -\frac{3}{2}(1 \pm \sqrt{3}i)$. Avem $x^3 + 27 = (x + 3)(x^2 - 3x + 9) = 0$; se obțin rădăcinile: $-3, \frac{3}{2}(1 \pm \sqrt{3}i)$;

d) $-\sqrt[3]{5}, \frac{\sqrt[3]{5}}{2}(1 \pm \sqrt[3]{3}i)$. e) Scriem $x^4 - 16 = (x + 2)(x - 2)(x^2 + 4)$, de unde rezultă rădăcinile: $-2, 2, -2i, 2i$; f) Avem $x^4 + 16 = (x^2 + 4)^2 - 8x^2 = (x^2 + 2\sqrt{2}x + 4)(x^2 - 2\sqrt{2}x + 4) = 0$. Rădăcinile ecuației sînt: $-\sqrt{2} + \sqrt{2}i, -\sqrt{2} - \sqrt{2}i, \sqrt{2} - \sqrt{2}i, \sqrt{2} + \sqrt{2}i$; g) $-\frac{\sqrt[4]{12}(1 \pm i)}{2}, \frac{\sqrt[4]{12}(1 \pm i)}{2}$. 16. a) 0; b) 0. 17. a) $x_1x_2x_3 = 6$; b) $x_1x_2x_3x_4 = 7$. 20. a) Punctele se află pe parabola $y = -x^2 + 10$; b) Punctele se află pe dreapta $y = 1 - x$. 21. b) $\{(1, \sqrt{2}), (1, -\sqrt{2}), (2, 1), (2, -1)\}$. c) $\{(7, 3), (-7, -3)\}$. 22. Pentru $b > 0$, $x + yi = \pm \left(\sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} + i \sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} \right)$; pentru $b < 0$, $x + yi = \pm \left(\sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} - i \sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} \right)$. 23. Se notează $z^2 = y$ și se are în vedere problema precedentă.

BIBLIOGRAFIE

1. M. Becheanu, V. Căzănescu, C. Năstăsescu, S. Rudeanu: *Logică matematică și teoria mulțimilor* (manual pentru anul II liceu, clase speciale de matematică), Editura Didactică și Pedagogică, București, 1972.
2. *Algebră și elemente de analiză* (manual pentru cl. a IX-a, școli medii, din U.R.S.S., sub redacția A.N. Kolmogorov), Moscova, 1976.
3. Gh. Dumitrescu, *Manual de algebră*, pentru cl. a IX-a, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1963.
4. I.S. Gradstein, *Teorema directă și reciprocă*, Editura Tehnică, 1960 (traducere din lb. rusă).
5. Ion Ionescu, *Maxime și minime geometrice*, Editura Tehnică, București, 1955.
6. F. Speranza, *Relații și structuri*, Editura Științifică și Enciclopedică, București, 1975 (traducere din lb. italiană).
6. I. Stamate și I. Stoian, *Culegere de probleme de Algebră* (pentru licee), Editura Didactică și Pedagogică, București, 1979.

CUPRINS

I. Ecuații de gradul întâi și de gradul al doilea (recapitulare)	3
1. Ecuații și inecuații de gradul întâi	3
2. Ecuații de gradul al doilea cu rădăcini reale	6
<i>Exerciții</i>	11
II. Elemente de logică matematică, mulțimi, funcții	14
1. Elemente de logică matematică	14
<i>Exerciții</i>	21
2. Mulțimi	21
<i>Exerciții</i>	27
3. Funcții	29
<i>Exerciții</i>	40
III. Numere reale	43
1. Reprezentarea numerelor raționale sub formă de fracții zecimale (perio- dice)	43
2. Numere reale ca fracții zecimale infinite	49
3. Ordonarea numerelor reale	50
4. Aproximări zecimale ale numerelor reale	52
5. Adunarea și înmulțirea numerelor reale	53
6. Interpretarea geometrică a numerelor reale	57
<i>Exerciții</i>	58
IV. Funcția de gradul al doilea	61
1. Definiția funcției de gradul al doilea. Exemple	61
2. Graficul funcției de gradul al doilea	62
3. Maximul sau minimul funcției de gradul al doilea	68
4. Intervale de monotonie pentru funcția de gradul al doilea	70
5. Tabelul de variație și trasarea graficului funcției de gradul al doilea	74
6. Semnul funcției de gradul al doilea	75
7. Aplicații ale semnului funcției de gradul al doilea	78
8. Aplicații practice ale studiului funcției de gradul al doilea	82
9. Rezolvarea citorva sisteme de ecuații cu coeficienți reali	86
<i>Exerciții</i>	93

V. Puteri și radicali	98
1. Puteri	98
<i>Exerciții</i>	105
2. Radicali	106
<i>Exerciții</i>	122
VI. Numere complexe	125
1. Mulțimea numerelor complexe	125
2. Forma algebrică a numerelor complexe.....	129
3. Reprezentarea geometrică a numerelor complexe.....	133
4. Rezolvarea ecuației de gradul al doilea cu coeficienți reali.....	136
<i>Exerciții</i>	138
VII. Probleme recapitulative	141
Răspunsuri și indicații	148
Bibliografie	157

